POLITEXT 111

Mecánica de estructuras
Libro 1
Resistencia de materiales

POLITEXT

Miguel Cervera Ruiz
Elena Blanco Díaz

Mecánica de estructuras
Libro 1
Resistencia de materiales

EDICIONS UPC

La presente obra fue galardonada en el octavo concurso
"Ajuts a l'elaboració de material docent" convocado por la UPC.

Primera edición: septiembre de 2001
Segunda edición: septiembre de 2002
Reimpresión: septiembre de 2003

Diseño de la cubierta: Manuel Andreu

© Los autores, 2001

© Edicions UPC, 2001
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
E-mail: edicions-upc@upc.es

Producción: CPET (Centre de Publicacions del Campus Nord)
La Cup. Gran Capità s/n, 08034 Barcelona

Depósito legal: B-28576-2002
ISBN: 84-8301-622-2
ISBN Obra completa: 84-8301-623-0

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

A nuestras familias

Prólogo

Esta obra recoge el programa docente de la asignatura "Estructuras", que los autores imparten en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, dentro de las titulaciones de Ingeniería de Obras Públicas. Su contenido abarca temas de Resistencia de Materiales y de Análisis de Estructuras de Barras. Por tanto, el planteamiento de la obra coincide, en gran medida, con el de asignaturas de "Mecánica de Estructuras" que, con diferentes nombres, desarrollan la materia troncal de "Teoría de Estructuras" en diversas titulaciones españolas de Ingeniería.

La obra se estructura en dos volúmenes:

- *Libro 1: Resistencia de Materiales*, donde se exponen los fundamentos de la Teoría de la Elasticidad y de la Resistencia de Materiales y en el que se estudian los estados de deformación y tensión que provocan los diferentes esfuerzos que pueden actuar sobre las secciones rectas de las piezas de una estructura de barras.

- *Libro 2: Métodos de Análisis*, donde se abordan los fundamentos del Análisis de Estructuras de Barras y en el que se estudian los métodos de resolución de éstas. Se plantean los métodos de compatibilidad y equilibrio, tanto a partir de formulaciones diferenciales como integrales. Se estudia también el método de equilibrio en su versión matricial (método de rigidez).

La comprensión de los diferentes temas se ve favorecida por la inclusión de numerosos ejemplos resueltos provenientes de las clases prácticas de la asignatura.

La presente edición es una nueva versión, revisada y ampliada, de la edición original de 1992 y de la segunda edición de 1999. En esta nueva presentación, se ha completado el contenido con la adición de nuevas secciones y diversos ejemplos y se ha reestructurado de forma sustancial la obra para facilitar la comprensión de los principios fundamentales del Análisis de Estructuras.

Los autores agradecen a los profesores del Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña su colaboración en la compilación y redacción de este libro. Apreciamos, de modo particular, la ayuda del profesor Dr. Gabriel Bugeda, que revisó la versión final del manuscrito. Asimismo, agradecemos a los Sres. Eduardo González y Raúl Giménez por la delineación de las figuras y esquemas que se incluyen y al Dr. Eduardo Car por su ayuda en las tareas de edición. Por último, se agradece el apoyo de la E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona y de la Universidad Politécnica de Cataluña, a través de sus respectivos programas de incentivación para la elaboración de material docente.

Miguel Cervera Ruiz y Elena Blanco Díaz

Barcelona, Mayo de 2001

Índice General

1 Fundamentos de Elasticidad **1**

1.1 Introducción 1
1.2 Concepto de tensión 2
1.3 Ecuaciones de equilibrio. Tensor de tensiones 4
1.3.1 Componentes de tensión 4
1.3.2 Ecuaciones de equilibrio de Cauchy 5
1.3.3 Tensión sobre un plano arbitrario. Tetraedro de Cauchy 7
1.4 Tensiones principales 9
1.5 Estado plano de tensiones 10
1.6 Concepto de deformación 12
1.7 Tensor de deformaciones 14
1.8 Elasticidad y linealidad. Ley de Hooke 16
1.9 Principio de superposición 17
1.10 Ley de Hooke generalizada 18
1.10.1 Módulo de rigidez a cortante 21
1.10.2 Módulo de elasticidad volumétrico 23
1.11 Relación tensión-deformación. Estudio experimental 25
1.12 Tensión límite, tensión admisible y coeficiente de seguridad 29
1.13 Tensión equivalente y criterios de resistencia 31

2 Fundamentos de Resistencia de Materiales **35**

2.1 Introducción 35
2.2 Objetivo de la Resistencia de Materiales 36
2.3 Concepto de pieza y estructura 37
2.4 Principios de la Resistencia de Materiales 38
2.4.1 Principio de rigidez 38
2.4.2 Principio de superposición 39
2.4.3 Principio de Saint-Venant 40

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

2.4.4 Restricciones geométricas 42
2.5 Definición de esfuerzos en una sección 43
2.6 Relación entre esfuerzos y tensiones 45
2.7 Esfuerzos en piezas de plano medio 47
2.8 Ecuaciones de equilibrio en piezas rectas 49
2.9 Apoyos y enlaces en estructuras de plano medio 50
2.9.1 Apoyos 50
2.9.2 Enlaces 52
2.10 Estructuras isostáticas e hiperestáticas 54
2.11 Leyes de esfuerzos 57
2.12 Resolución de estructuras hiperestáticas 75
2.12.1 Método de compatibilidad 75
2.12.2 Método de equilibrio 78

3 Esfuerzo Axil **81**
3.1 Introducción 81
3.2 Esfuerzo axil en una pieza recta 81
3.3 Secciones de varios materiales 88
3.4 Estructuras articuladas 93
3.4.1 Estructuras articuladas isostáticas 94
3.4.2 Estructuras articuladas hiperestáticas 98

4 Momento Flector **99**
4.1 Introducción 99
4.2 Flexión pura recta 101
4.2.1 Flexión pura en piezas de plano medio 101
4.2.2 Flexión pura según un plano principal de inercia 107
4.2.3 Momentos máximos admisibles 109
4.2.4 Módulos resistentes 110
4.2.5 Rendimiento geométrico 110
4.3 Flexión pura esviada 119
4.3.1 Estudio en ejes principales 120
4.3.2 Deformación en flexión pura esviada 124
4.3.3 Estudio directo 128
4.4 Flexión simple 139
4.5 Flexión en piezas planas de pequeña curvatura 145
4.6 Secciones de varios materiales 146

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

5 Flexión Compuesta **153**
5.1 Introducción . . . 153
5.2 Flexión compuesta recta . . . 155
5.3 Flexión compuesta esviada . . . 165
5.3.1 Estudio en ejes principales . . . 165
5.3.2 Estudio directo . . . 178
5.4 Secciones de varios materiales . . . 186
5.5 Núcleo central de la sección . . . 190
5.5.1 Sección circular . . . 192
5.5.2 Sección corona circular . . . 193
5.5.3 Sección rectangular . . . 194
5.5.4 Sección en doble T . . . 194

6 Esfuerzo Cortante **199**
6.1 Introducción . . . 199
6.2 Teoría elemental de la cortadura . . . 200
6.3 Teoría de Collignon . . . 202
6.4 Secciones macizas . . . 210
6.4.1 Sección rectangular . . . 210
6.4.2 Sección simétrica . . . 212
6.4.3 Sección circular . . . 214
6.4.4 Sección triangular isósceles . . . 215
6.5 Secciones de pequeño espesor . . . 217
6.5.1 Secciones abiertas . . . 217
6.5.2 Secciones cerradas . . . 230
6.6 Deformación de alabeo . . . 236
6.6.1 Área reducida de cortante . . . 238
6.7 Esfuerzo cortante esviado . . . 239
6.7.1 Estudio en ejes principales . . . 239
6.7.2 Estudio directo . . . 242
6.8 Centro de esfuerzos cortantes . . . 246
6.8.1 Posición del centro de esfuerzos cortantes . . . 251
6.9 Secciones de varios materiales . . . 260

7 Momento Torsor **263**
7.1 Introducción . . . 263
7.2 Torsión de Coulomb . . . 265
7.2.1 Sección circular . . . 265

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

7.2.2 Sección circular de varios materiales 269
7.2.3 Sección circular hueca 270
7.3 Torsión de Saint-Venant 271
7.3.1 Formulación general 271
7.3.2 Analogía de la membrana 275
7.3.3 Sección rectangular 278
7.3.4 Secciones rectangulares estrechas 279
7.3.5 Perfiles laminados abiertos 280
7.3.6 Analogía hidrodinámica 286
7.3.7 Secciones cerradas de pequeño espesor 288
7.3.8 Secciones multicelulares 293
7.4 Torsión no uniforme 297

A Características Geométricas de la Sección 303
A.1 Secciones homogéneas 303
A.1.1 Momento estático axial de una sección 303
A.1.2 Momentos de inercia de una sección 306
A.1.3 Traslación de ejes de referencia 308
A.1.4 Rotación de ejes de referencia 310
A.1.5 Ejes principales de inercia 311
A.1.6 Elipse central de inercia 313
A.2 Secciones de varios materiales 315

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

1 Fundamentos de Elasticidad

1.1 Introducción

La Resistencia de Materiales y la Teoría de la Elasticidad, como partes integrantes de la Mecánica de Sólidos Deformables, son dos disciplinas con objetivos comunes: ambas abordan el estudio de la resistencia (estado de tensiones) y la rigidez (estado de deformaciones) de cuerpos sólidos deformables sometidos a la acción de sistemas de fuerzas en equilibrio estático. Asimismo, ambas parten del principio de linealidad entre acción y respuesta; esto, como se verá en lo que sigue, implica que el comportamiento de los materiales se supone "elástico" y que los movimientos que se producen se suponen "pequeños".

La Resistencia de Materiales limita su campo de aplicación a ciertos tipos de elementos estructurales (vigas, columnas, etc.) sustentados de ciertas maneras predeterminadas (apoyos simples, articulaciones, empotramientos, etc.) y sometidas a ciertos tipos de acciones (fuerzas puntuales y repartidas, generalmente, y otras acciones definidas de forma adecuada). Esta restricción previa en cuanto a las geometrías, condiciones de apoyo y acciones consideradas permite la formulación de ciertas hipótesis de partida y de un planteamiento simplificado apto para la resolución analítica de multitud de problemas "cotidianos" de ingeniería estructural.

La Teoría de la Elasticidad, por su parte, afronta el problema "mecánico" en su forma más general en cuanto a geometrías, condiciones de contorno y tipos de acciones consideradas. Esto conlleva un rigor que precisa de un plantemiento matemático que impide obtener soluciones analíticas, salvo para un número limitado de casos, requiriendo el uso de métodos numéricos aproximados (diferencias finitas, elementos finitos, etc.) para la resolución de la mayor parte de problemas de interés práctico.

Desde el punto de vista histórico, la Resistencia de Materiales se inicia como disciplina científica a principios del siglo XVII con los trabajos de Galileo, recopilados en su obra "Dos Nuevas Ciencias" (1638). Se desarrolla después enormemente en la Europa

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

de los siglos XVII y XVIII, junto a las demás ciencias empíricas, gracias a las aportaciones de Robert Hooke, los hermanos Jacob y John Bernouilli, Leonard Euler y Charles Augustin Coulomb, entre otros nombres destacados, y queda establecida de forma casi definitiva en la primera mitad del siglo XIX con los trabajos de Thomas Young ("A Course of Lectures on Natural Philosophy and The Mechanical Arts", 1807), Louis Navier ("Résumé des Leçons de Mécanique", 1824) y Barré de Saint-Venant ("Résumé des Leçons de Mécanique", reedición de 1864). Por su parte, la Teoría de la Elasticidad se inicia a finales del siglo XVIII y principios del XIX, para tomar forma en los trabajos de L. Navier (1821), Augustin Cauchy (1822), Gabriel Lamé (1825) y B. de Saint-Venant (1868), entre otros.

Dados sus objetivos (y principios) comunes, la Resistencia de Materiales y la Teoría de la Elasticidad siguen caminos paralelos prácticamente desde sus inicios y, a partir de la sistematización de ambas, no es fácil delimitar de forma nítida los ámbitos respectivos. Desde la perspectiva actual, es habitual considerar a la Resistencia de Materiales como una parte subordinada de la, más general, Teoría de la Elasticidad. En cualquier caso, ambas disciplinas manejan multitud de conceptos comunes, tales como los de fuerza, desplazamiento, tensión, deformación, equilibrio, compatibilidad, linealidad, etc. En este Capítulo se exponen brevemente algunos de estos conceptos y principios comunes que serán utilizados a lo largo de los temas posteriores. En el Capítulo siguiente se establecen los conceptos y principios básicos de la Resistencia de Materiales propiamente dicha.

1.2 Concepto de tensión

Consideremos un cuerpo sólido sometido a la acción de un sistema de fuerzas exteriores (cargas aplicadas y reacciones) en equilibrio, e imaginémoslo cortado por una sección cualquiera S que lo divide en dos partes, (A) y (B), situadas a ambos lados de la sección S (ver Figura 1.1). Para que exista equilibrio en las dos partes resultantes, (A) y (B), deben existir unas ciertas fuerzas de interacción a través de la superficie S a las que llamaremos $\vec{F}$. Las fuerzas de interacción son iguales en magnitud y dirección, pero de sentidos opuestos, sobre las secciones S de las partes (A) y (B), según exige el principio de acción y reacción.

Consideremos un punto sobre la superficie S y un entorno de dicho punto de área ΔS. Llamemos $\Delta\vec{F}$ a la fuerza que la parte (B) del cuerpo ejerce sobre la parte (A) a través del área ΔS. La fuerza por unidad de área vale entonces:

$$\vec{t}_m = \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S} \tag{1.1}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

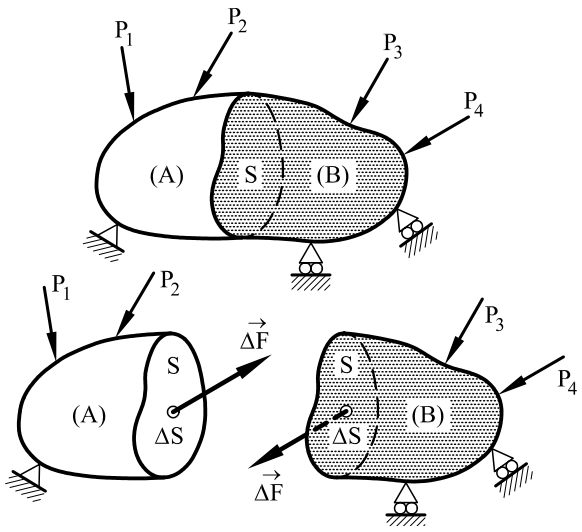

Fig. 1.1: Concepto de tensión media

A esta fuerza por unidad de área $\vec{t}_m$ se le llama tensión media sobre la superficie S en el punto considerado. Si se hace tender el área ΔS a un elemento diferencial de área dS, se obtiene lo que se define como tensión en un punto según una superficie S dada:

$$\vec{t} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS} \tag{1.2}$$

Respecto al concepto de tensión pueden hacerse las siguientes observaciones:

- Las dimensiones de la tensión son $[FL^{-2}]$, o sea, fuerza por unidad de superficie. En el sistema internacional la tensión se mide en Pascales (Pa), es decir, en $\mathrm{N/m^2}$.
- La tensión depende del punto y de la orientación de la sección elegidos. Así, en un punto dado se tendrán diferentes tensiones según la orientación considerada, y para una sección dada se tendrán tensiones diferentes para distintos puntos.
- En general, la tensión no es normal al plano de corte considerado, sino que puede descomponerse según dos componentes: la tensión normal al plano de la sección, σ, y la tensión tangencial a dicho plano, τ, tal como se muestra en la Figura 1.2. El módulo de la tensión $\vec{t}$ es igual a:

$$|\vec{t}| = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \tag{1.3}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

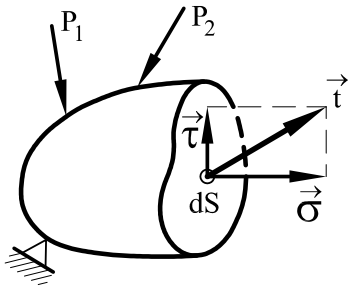

Fig. 1.2: Componentes normal y tangencial de la tensión

1.3 Ecuaciones de equilibrio. Tensor de tensiones

1.3.1 Componentes de tensión

Consideremos un cuerpo sometido a la acción de un sistema de fuerzas en equilibrio. Sea O un punto de su interior en el que se desea determinar el estado tensional, es decir, conocer la tensión que actúa según un plano de orientación arbitraria que pase por dicho punto.

Analicemos un elemento diferencial de volumen, de forma hexaédrica y de dimensiones (dx, dy, dz), con vértice en O y con caras paralelas a un cierto sistema de referencia cartesiano (x, y, z) con origen en O (ver Figura 1.3). Sobre cada cara del elemento diferencial actúa una tensión $\vec{t}$ diferente que se puede descomponer según los ejes de referencia (ver Figura 1.4). Llamaremos σ a las componentes del vector tensión normales a cada cara y τ a las componentes tangenciales. Las componentes tangenciales se pueden descomponer a su vez en las direcciones de los dos ejes paralelos a la cara.

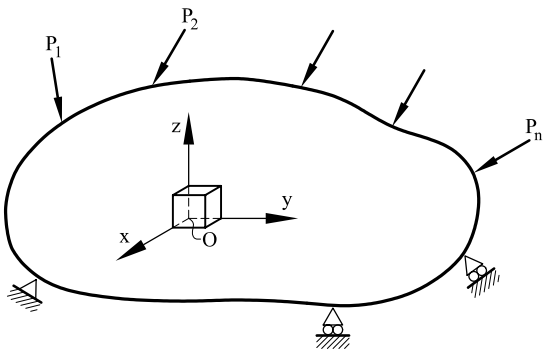

Fig. 1.3: Sistema cartesiano de referencia

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

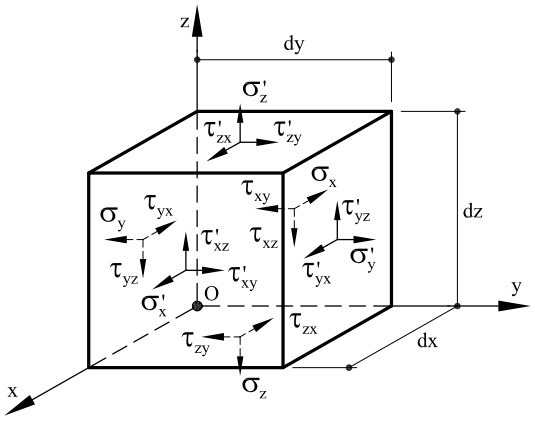

Fig. 1.4: Componentes cartesianas de la tensión

Así, sobre las caras normales al eje $\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\}$ actúan las componentes $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz} \\ \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz} \\ \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy} \end{array} \right.$.

El subíndice de las tensiones normales representa el eje coordenado al que es normal la superficie sobre la que actúan. Los dos subíndices de las tensiones tangenciales de una superficie indican, el primero, el eje al cual es normal la superficie sobre la que actúan y, el segundo, el eje al que es paralela la componente tangencial. En las caras que no forman los ejes coordenados, se consideran componentes positivas las que tienen los sentidos de los ejes. En las caras que sí forman los ejes coordenados, se consideran los sentidos positivos opuestos. De esta forma, las tensiones de tracción son tensiones normales positivas y negativas las de compresión.

1.3.2 Ecuaciones de equilibrio de Cauchy

Si distinguimos con una prima las tensiones que actúan sobre las caras que no forman los ejes coordenados (ver Figura 1.4), las relaciones que existen entre las tensiones correspondientes a caras paralelas, por ejemplo, las dos caras del paralelepípedo perpendiculares al eje x, son, por continuidad del campo de tensiones:

$$\begin{array}{rcccl} \sigma'_x & = & \sigma_x + d\sigma_x & = & \sigma_x + \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \\ \tau'_{xy} & = & \tau_{xy} + d\tau_{xy} & = & \tau_{xy} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \\ \tau'_{xz} & = & \tau_{xz} + d\tau_{xz} & = & \tau_{xz} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \end{array} \qquad (1.4)$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Análogamente pueden obtenerse las relaciones para las componentes de tensión actuando sobre las caras perpendiculares a los ejes (y, z).

Supongamos que sobre el elemento diferencial actúan unas fuerzas por unidad de volumen $\vec{b}$, cuyas componentes cartesianas son $\vec{b}\ (b_x, b_y, b_z)$. Planteemos ahora las condiciones de equilibrio estático del elemento diferencial aislado. Del equilibrio de fuerzas según las tres direcciones cartesianas se obtienen las ecuaciones de equilibrio interno o de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \qquad (\textstyle\sum F_x = 0) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y &= 0 \qquad (\textstyle\sum F_y = 0) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0 \qquad (\textstyle\sum F_z = 0) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Por otra parte, del equilibrio de momentos se obtiene el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, que permite reducir a la mitad el número de componentes independientes de las tensiones tangenciales, de seis a tres. En efecto, si se toman momentos respecto al eje x de las fuerzas que actúan sobre el volumen diferencial, la suma debe ser nula. Tal como se ve en la Figura 1.5, y despreciando el efecto de las fuerzas de volumen y de los diferenciales de tensión por ser infinitésimos de cuarto orden, sólo las resultantes de las componentes τ_{yz} y τ_{zy} producen momento neto según el eje x:

$$(\tau_{yz}\, dxdz)\, dy - (\tau_{zy}\, dxdy)\, dz = 0 \qquad (\textstyle\sum M_x = 0) \tag{1.6}$$

o sea,

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad (\textstyle\sum M_x = 0) \tag{1.7a}$$

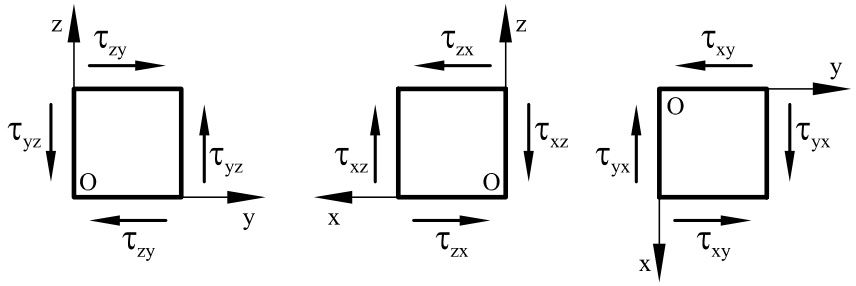

Fig. 1.5: Equilibrio de momentos en un elemento diferencial

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

De forma análoga se obtiene que:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad (\sum M_y = 0) \tag{1.7b}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad (\sum M_z = 0) \tag{1.7c}$$

Por lo tanto, el principio de reciprocidad de tensiones tangenciales establece que "en dos planos perpendiculares entre sí, las componentes de las tensiones tangenciales normales a la arista común en un punto son iguales en módulo, y ambas concurren o se separan simultáneamente de la arista", tal como se muestra en la Figura 1.6.

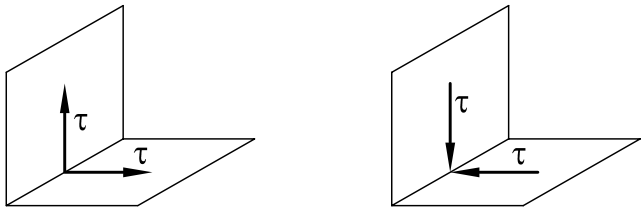

Fig. 1.6: Reciprocidad de las tensiones tangenciales

1.3.3 Tensión sobre un plano arbitrario. Tetraedro de Cauchy

El sistema de tensiones que actúa sobre los planos coordenados que pasan por un punto está definido por seis componentes independientes: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. Estas seis componentes definen el tensor de tensiones en un punto que, como veremos a continuación, permite calcular la tensión que actúa sobre cualquier plano que pase por dicho punto.

Supongamos que se desean calcular las componentes de la tensión $\vec{t}$ según una orientación arbitraria definida por la cara ABC. Se define un tetraedro diferencial $OABC$, con vértice en O y con tres caras paralelas a los ejes coordenados, según se muestra en la Figura 1.7. En el límite, todas las caras pasan por O y las tensiones sobre las caras son tensiones en el punto O según diferentes planos. La cara ABC, de área dA, está definida por los cosenos directores (l, m, n) de su normal exterior $\vec{n}$. Las componentes de $\vec{t}(t_x, t_y, t_z)$ se pueden calcular en función de las tensiones sobre las otras caras, imponiendo que el elemento diferencial esté en equilibrio de fuerzas.

Por ser $\sum F_x = 0$, se tiene que

$$t_x\, dA - \sigma_x\, (l\, dA) - \tau_{yx}\, (m\, dA) - \tau_{zx}(n\, dA) = 0 \tag{1.8a}$$

luego:

$$t_x = \sigma_x\, l + \tau_{yx}\, m + \tau_{zx}\, n \tag{1.8b}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

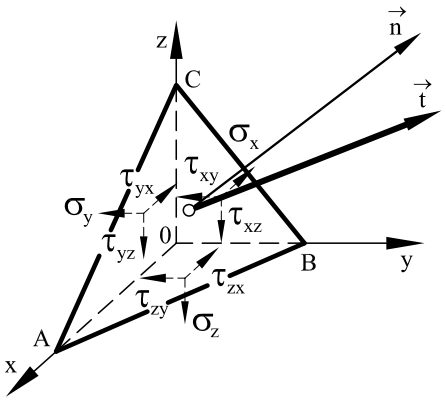

Fig. 1.7: Tetraedro de Cauchy

De forma análoga, por ser $\sum F_y = 0$ y $\sum F_z = 0$, se tiene:

$$t_y = \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{zy}\, n \tag{1.8c}$$

$$t_z = \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n \tag{1.8d}$$

Matricialmente se puede escribir:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{n} \tag{1.9}$$

donde $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{n}$ son los vectores tensión y normal, respectivamente, y $\boldsymbol{T}$ es el tensor de tensiones que es igual a:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Por el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, el tensor de tensiones es simétrico.

De lo anterior se deduce que conocido el tensor de tensiones de un punto y los cosenos directores de la normal a una superficie cualquiera que pasa por el punto se puede determinar la tensión $\vec{t}$ en dicha superficie.

Conocida la tensión $\vec{t}$ en una superficie cualquiera ABC, para determinar la componente normal a la superficie, basta proyectar $\vec{t}$ sobre el vector normal $\vec{n}$, es decir:

$$\begin{aligned} \sigma &= \vec{t}\cdot\vec{n} \\ &= t_x\, l + t_y\, m + t_z\, n \\ &= \sigma_x\, l^2 + \sigma_y\, m^2 + \sigma_z\, n^2 + 2\tau_{xy}\, lm + 2\tau_{yz}\, mn + 2\tau_{zx}\, nl \end{aligned} \tag{1.11}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

y el valor de la componente tangencial (sobre la superficie ABC) es

$$\tau = \sqrt{|\vec{t}|^2 - \sigma^2} \tag{1.12}$$

1.4 Tensiones principales

Conocida la expresión que proporciona el valor de las componentes cartesianas de la tensión, $\vec{t}$, en una superficie definida por el correspondiente vector unitario normal a ella, $\vec{n}$,

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{n} \tag{1.13}$$

cabe preguntarse para qué direcciones ocurre que la tensión es exclusivamente *normal* a la superficie, es decir, para qué direcciones se cumple que

$$\boldsymbol{t} = \sigma\,\boldsymbol{n} \tag{1.14}$$

donde σ es un valor escalar que corresponde al módulo de la tensión en la dirección definida por $\vec{n}$. Combinando las dos ecuaciones anteriores, se tiene que debe cumplirse que

$$(\,\boldsymbol{T} - \sigma\boldsymbol{I}\,)\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \tag{1.15}$$

donde $\boldsymbol{I}$ es una matriz unitaria 3 x 3. Para que este sistema de ecuaciones, lineal y homogéneo, tenga solución, es necesario que el determinante del sistema sea nulo, o sea

$$|\,\boldsymbol{T} - \sigma\boldsymbol{I}\,| = 0 \tag{1.16}$$

o, desarrollando el determinante, que sea

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{1.17}$$

donde

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{1.18a}$$
$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \tag{1.18b}$$
$$I_3 = |\,\boldsymbol{T}\,| \tag{1.18c}$$

Al ser $\boldsymbol{T}$ una matriz simétrica, la Ec. (1.17) tiene siempre tres raíces reales, σ_1, σ_2, y σ_3, a las que se llama *tensiones principales*. Una vez determinadas éstas, se pueden resolver los tres sistemas de ecuaciones

$$(\,\boldsymbol{T} - \sigma_i\boldsymbol{I}\,)\,\boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{0} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.19}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

y obtener los tres vectores unitarios $\boldsymbol{n}_i$ correspondientes a las llamadas *direcciones principales* del tensor de tensiones $\boldsymbol{T}$. Es un resultado conocido que estas tres direcciones siempre existen y son mutuamente ortogonales, conformando así, ordenadas adecuadamente, un triedro cartesiano dextrógiro. Es evidente que si se toma dicho triedro como sistema de referencia, en él el tensor de tensiones es un tensor diagonal formado por los valores principales de tensión.

Como los valores de las tensiones principales no pueden depender del sistema de referencia adoptado, los coeficientes de la ecuación (1.17), I_1, I_2 e I_3, no deben depender de éste, y se conocen, por tanto, como *invariantes de tensión*. La invariancia de I_1 establece la invariancia de la traza del tensor de tensiones, es decir, que la suma de las tensiones normales que actúan sobre tres planos cualesquiera mutuamente ortogonales es constante e igual a la suma de los valores de las tensiones principales. Si I_3 es nulo, el estado de tensiones correspondiente se llama *estado plano de tensión*.

1.5 Estado plano de tensiones

Cuando las componentes tensionales sobre planos normales al eje z, σ_z, τ_{zx} y τ_{zy}, son nulas, las tensiones $\vec{t}$ están siempre contenidas en el plano xy, y entonces se dice que se tiene un estado plano de tensiones. Este es el caso, por ejemplo, de una placa delgada cargada mediante fuerzas aplicadas en el contorno y paralelas al plano de la placa. El estado tensional queda entonces definido por las componentes $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Conocidas estas componentes del tensor de tensiones en cualquier punto O, es posible determinar la tensión sobre una superficie arbitraria, si se conocen los cosenos directores de la misma.

Sea AB esta orientación arbitraria, y $\vec{n}\ (l, m)$, con $l = \cos\,\alpha$ y $m = \sin\,\alpha$, el vector normal que la define. Por equilibrio, y según la expresión (1.9), se tiene:

$$t_x = \sigma_x\ \cos\alpha + \tau_{yx}\ \sin\ \alpha \tag{1.20a}$$

$$t_y = \tau_{xy}\ \cos\alpha + \sigma_y\ \sin\ \alpha \tag{1.20b}$$

donde t_x y t_y son las componentes cartesianas de la tensión $\vec{t}$ en el punto O según el plano AB. Las componentes normal y tangencial de dicha tensión se obtienen proyectando las componentes t_x y t_y sobre las direcciones normal y tangencial al plano AB, respectivamente:

$$\begin{aligned} \sigma &= t_x\ \cos\ \alpha + t_y\ \sin\ \alpha \\ &= \sigma_x\ \cos^2\alpha + \sigma_y\ \sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\ \sin\ \alpha\ \cos\ \alpha \end{aligned} \tag{1.21a}$$

$$\begin{aligned} \tau &= t_y\ \cos\ \alpha - t_x\ \sin\ \alpha \\ &= \tau_{xy}\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\sigma_y - \sigma_x)\ \sin\ \alpha\ \cos\ \alpha \end{aligned} \tag{1.21b}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

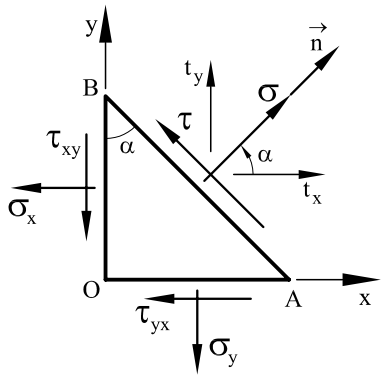

Fig. 1.8: Estado plano de tensiones

De las ecuaciones anteriores se deduce que existe un cierto ángulo α para el cual la tensión tangencial τ se anula, es decir:

$$\tau_{xy}\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\sigma_y - \sigma_x)\ \sin\ \alpha\ \cos\ \alpha = 0 \tag{1.22}$$

de donde

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin\ \alpha\ \cos\ \alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{1}{2}\ \tan 2\alpha \tag{1.23}$$

A partir de esta ecuación es posible hallar dos direcciones perpendiculares entre sí para las cuales la tensión tangencial se anula; dichas direcciones son las direcciones principales de tensión y las tensiones normales correspondientes son las tensiones principales.

Si se conocen las componentes del tensor de tensiones correspondientes a dos planos perpendiculares entre sí (σ_x, σ_y, τ_{xy}) es posible determinar las tensiones principales mediante una construcción gráfica llamada círculo de Mohr, que se muestra en la Figura 1.9. En el plano $\sigma - \tau$ se construye el círculo que pasa por los puntos $D(\sigma_x, \tau_{xy})$ y $D'(\sigma_y, -\tau_{xy})$, con centro en $C\,(\,\frac{1}{2}\,(\sigma_x + \sigma_y)\,,0\,)$. Las intersecciones del círculo con el eje σ determinan los valores de las tensiones principales, ya que para ellos $\tau = 0$.

A partir de la construcción gráfica del círculo se pueden calcular los valores de las tensiones principales, σ_1 y σ_2, como:

$$\sigma_1 \;=\; \overline{AC} + \overline{CD} \;=\; \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{1.24a}$$

$$\sigma_2 \;=\; \overline{AC} - \overline{CD} \;=\; \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{1.24b}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

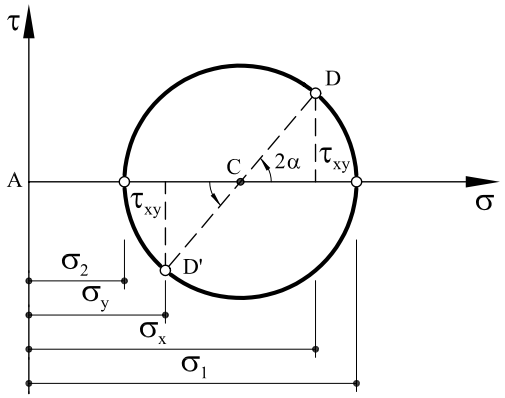

Fig. 1.9: Círculo de Mohr para estado plano de tensiones

También se puede medir el ángulo 2α que define las direcciones principales de tensión respecto a los ejes (x, y). Por otro lado, la tensión tangencial máxima en el punto es igual al radio del círculo, es decir:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{1.25}$$

La construcción gráfica de los círculos de Mohr es también posible en la situación general de un estado triaxial de tensiones, aunque de forma algo más compleja a la aquí comentada.

1.6 Concepto de deformación

Consideremos un cuerpo cualquiera sometido a la acción de fuerzas aplicadas, y con vínculos suficientes como para impedirle movimientos de sólido rígido. Dado que no existe material alguno que sea infinitamente rígido, la acción de las fuerzas se traduce en que el cuerpo se deforma. Supondremos en lo que sigue que el cuerpo se comporta de forma suficientemente rígida como para que los movimientos que se producen en el proceso de deformación sean pequeños comparados con las dimensiones del cuerpo (principio de rigidez).

La deformación de un elemento diferencial de volumen de dimensiones (dx, dy, dz), tal como el que se muestra en la Figura 1.10, puede descomponerse en tres partes: rotación y traslación (movimientos de sólido rígido) y deformación pura (cambio de forma). Nos ocuparemos en este apartado de la deformación pura únicamente.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

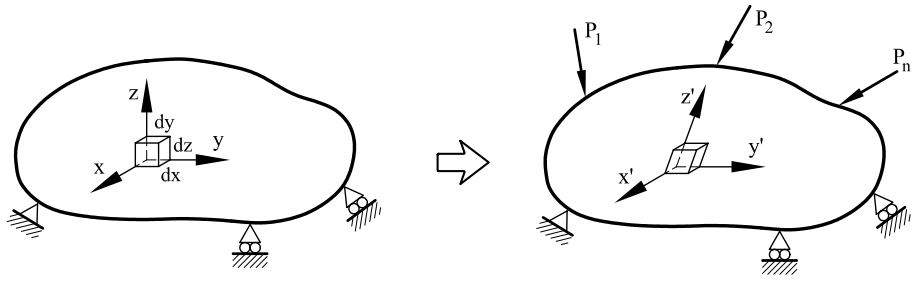

Fig. 1.10: Proceso de deformación de un elemento de volumen

Los lados del paralelepípedo elemental modifican sus longitudes iniciales dx, dy, dz de manera que las proyecciones de las nuevas longitudes sobre los tres ejes de referencia pasan a valer $(1 + \epsilon_x)\, dx, (1 + \epsilon_y)\, dy$, $(1 + \epsilon_z)\, dz$, respectivamente. Asimismo, las proyecciones de los ángulos rectos que forman entre sí las caras del elemento antes de la deformación varían para pasar a valer, expresadas en radianes, $\pi/2 \pm \gamma_{xy}$, $\pi/2 \pm \gamma_{xz}, \pi/2 \pm \gamma_{yz}$. Se llaman alargamientos unitarios o deformaciones lineales a los valores $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ y distorsiones o deformaciones angulares a los valores $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$. Debido al principio de rigidez, tanto las deformaciones lineales como las angulares son pequeñas, comparadas con la unidad.

Se consideran positivas las deformaciones lineales de alargamiento y negativas las de acortamiento. Asimismo, se consideran positivas las deformaciones angulares que originan disminución de los ángulos rectos formados por los planos correspondientes a los ejes de referencia, y negativas las que originan aumento de dichos ángulos.

Experimentalmente, se observa que, en los materiales mecánicamente isótropos, las tensiones normales dan lugar a alargamientos, mientras que las tensiones tangenciales provocan distorsiones (ver Sección 1.10).

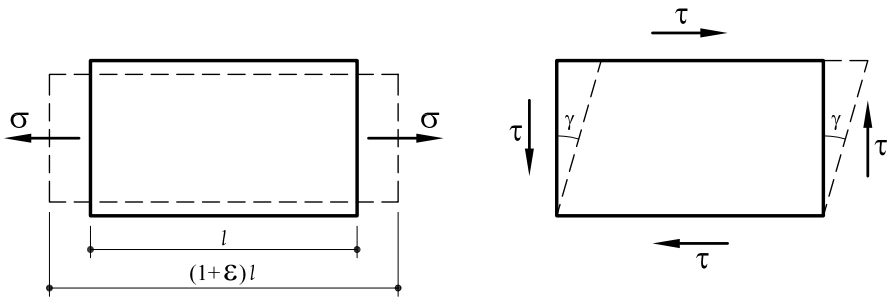

Fig. 1.11: Alargamiento y distorsión en un material isótropo

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

1.7 Tensor de deformaciones

Consideremos un elemento unitario $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{n}$, de cosenos directores (l, m, n). Se define como deformación $\vec{\delta}$ del elemento $\overrightarrow{OD}$ al desplazamiento $\overrightarrow{DD'}$ del punto D, originado por la deformación del paralelepípedo elemental que tenga a $\overline{OD}$ por diagonal, prescindiendo de rotaciones y traslaciones de sólido rígido (ver Figura 1.12a).

Calculamos a continuación las componentes cartesianas del vector $\vec{\delta}$, o sea $(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$. Para ello, sumamos las componentes del desplazamiento del punto D debidas a los alargamientos unitarios $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ y a las distorsiones $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ (Figuras 1.12b y c):

$$\begin{aligned} \delta_x &= \epsilon_x\ l + \frac{\gamma_{xy}}{2} m + \frac{\gamma_{xz}}{2} n \\ \delta_y &= \frac{\gamma_{xy}}{2} l + \epsilon_y\ m + \frac{\gamma_{yz}}{2} n \\ \delta_z &= \frac{\gamma_{xz}}{2} l + \frac{\gamma_{yz}}{2} m + \epsilon_z\ n \end{aligned} \tag{1.26}$$

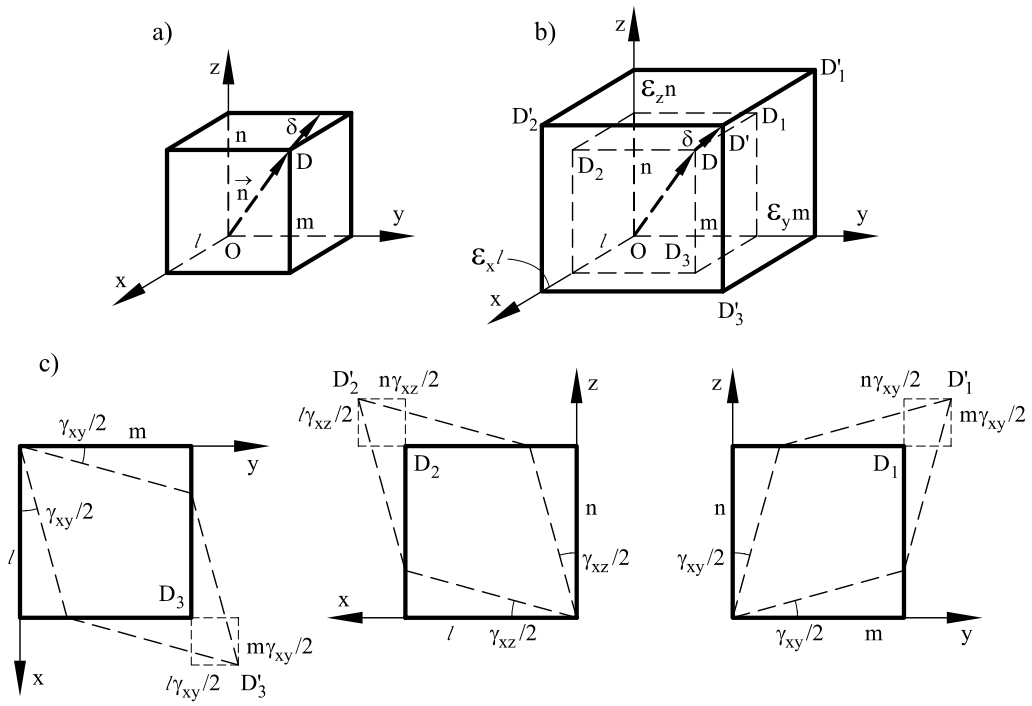

Fig. 1.12: (a) Concepto de vector deformación (b) Desplazamientos debidos a los alargamientos (c) Desplazamientos debidos a las distorsiones

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

o matricialmente:

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{n} \tag{1.27}$$

donde $\boldsymbol{\delta}$ y $\boldsymbol{n}$ son los vectores de deformación y el elemento unitario, definidos anteriormente, y $\boldsymbol{D}$ es el tensor de deformaciones que es igual a:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

El tensor de deformaciones es simétrico, al haber prescindido en su construcción de las rotaciones de sólido rígido.

Se deduce de la expresión (1.27) que, conocidas las componentes del estado de deformación de un punto (tensor de deformaciones) y los cosenos directores de un elemento lineal cualquiera, se puede conocer la deformación de dicho elemento.

La deformación longitudinal ϵ del elemento unitario se obtiene proyectando $\vec{\delta}$ sobre el vector $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \vec{\delta} \cdot \vec{n} \\ &= \epsilon_x\, l^2 + \epsilon_y\, m^2 + \epsilon_z\, n^2 + \gamma_{xy}\, lm + \gamma_{yz}\, mn + \gamma_{zx}\, nl \end{aligned} \tag{1.29}$$

Su deformación angular $\gamma/2$ se puede hallar mediante la expresión:

$$\frac{\gamma}{2} = \sqrt{|\vec{\delta}|^2 - \epsilon^2} \tag{1.30}$$

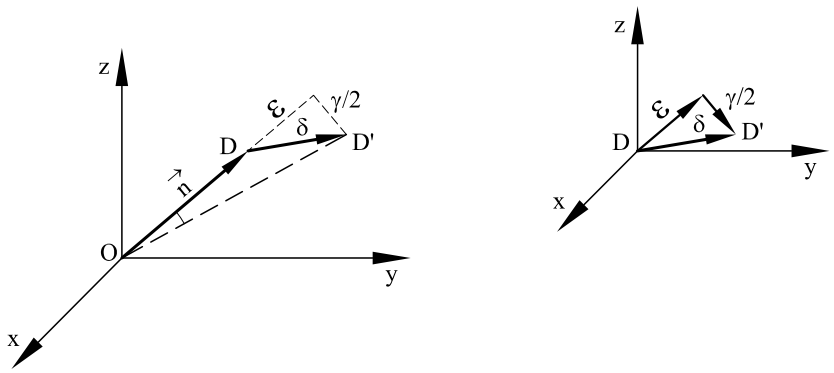

Fig. 1.13: Elongación y distorsión de un elemento unitario

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

1.8 Elasticidad y linealidad. Ley de Hooke

Todo cuerpo se deforma bajo la acción de las fuerzas aplicadas, y al cesar éstas, el cuerpo tiende a recuperar su forma primitiva. Esta tendencia que, en mayor o menor grado, tienen todos los cuerpos se denomina *elasticidad*.

En realidad, los cuerpos no son ni perfectamente elásticos ni perfectamente inelásticos. Las deformaciones que en ellos se producen constan de una parte de deformación elástica, que desaparece al cesar las fuerzas aplicadas, y una parte de deformación permanente, que se mantiene posteriormente. En un elevado número de cuerpos, si las fuerzas no sobrepasan determinados valores, las deformaciones permanentes son muy pequeñas, y en consecuencia, dichos cuerpos pueden considerarse elásticos.

Consideremos un experimento sencillo: se monta una viga biapoyada como la de la Figura 1.14 y se mide el desplazamiento vertical δ de un cierto punto A de la misma producido por una fuerza P aplicada en otro punto B de dicha viga. La fuerza P se aumenta de forma gradual hasta un cierto valor y se dibuja la curva $P - \delta$ obtenida. Si ahora descargamos la viga de forma gradual y dibujamos también la curva $P - \delta$ en descarga, observaremos que para valores máximos de P menores que cierto valor límite P_e, llamado límite elástico, las ramas de carga y descarga coinciden, no hay deformación permanente, y por lo tanto, el comportamiento es elástico. Si la carga P excede el límite elástico, la rama de descarga se separa de la de carga, se producen deformaciones permanentes y se dice que el comportamiento no es perfectamente elástico.

En el mismo experimento observaremos que existe otro valor límite P_p, menor que P_e (y, normalmente, próximo a éste), llamado límite de proporcionalidad, tal que para cargas menores que éste los desplazamientos son proporcionales a las fuerzas que los originan. Este enunciado define el comportamiento elástico lineal y se conoce como Ley de Hooke, ya que fue establecido por Robert Hooke en 1678 en su trabajo "De Potentia Restitutiva (of Springs)".

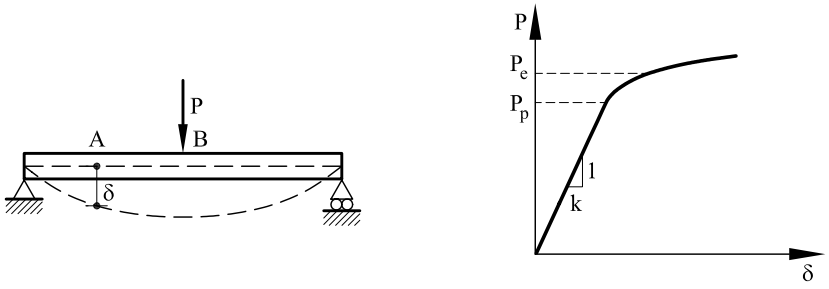

Fig. 1.14: Experimento y curva carga–desplazamiento

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Matemáticamente, la ley de Hooke se expresa de la forma:

$$\delta = k\,P \tag{1.31}$$

donde k es la constante de proporcionalidad entre la fuerza aplicada P y el desplazamiento δ que ésta produce. Obviamente, esta constante depende de la geometría del problema y de las propiedades mecánicas del material de la viga.

1.9 Principio de superposición

Si se cumple la ley de Hooke y se supone que los desplazamientos producidos por las fuerzas actuantes son muy pequeños en relación a las dimensiones del cuerpo, de tal manera que se pueda considerar que éste mantiene la forma y dimensiones originales, entonces puede aplicarse el Principio de Superposición o Principio de Linealidad. El Principio de Superposición establece que los efectos que un sistema de fuerzas aplicadas origina en un cuerpo son iguales a la suma de los efectos que originan esas mismas fuerzas actuando por separado.

Si sobre un cuerpo actúa un sistema formado por tres fuerzas P_1, P_2 y P_3, el Principio de Superposición establece que la componente u del desplazamiento de un punto interior O, según una cierta dirección de referencia, será:

$$u = u_1 + u_2 + u_3 \tag{1.32}$$

donde u_1, u_2 y u_3 son los valores que toma el correspondiente desplazamiento cuando actúan P_1, P_2 y P_3 solas, respectivamente. Si la ley de Hooke es aplicable, será:

$$u_1 = k_1\,P_1 \qquad u_2 = k_2\,P_2 \qquad u_3 = k_3\,P_3 \tag{1.33}$$

y podremos escribir:

$$u = k_1\,P_1 + k_2\,P_2 + k_3\,P_3 \tag{1.34}$$

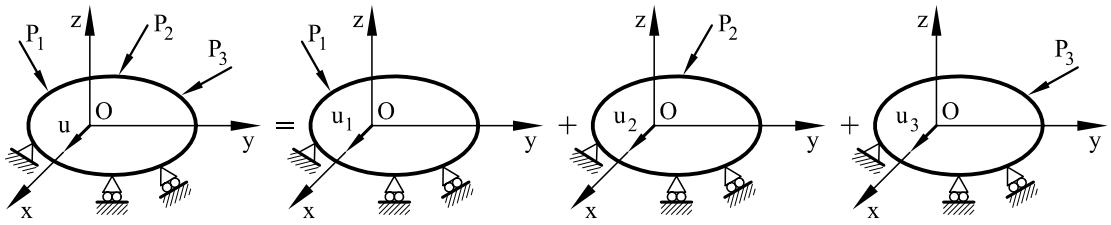

Fig. 1.15: Principio de superposición

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

En virtud de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, resulta claro que el enunciado del Principio de Superposición es equivalente a establecer que "los efectos que un sistema de fuerzas aplicadas origina en un cuerpo son independientes del orden de aplicación de las fuerzas". Matemáticamente, el Principio de Superposición establece que la relación acción-respuesta es lineal, y tiene, por tanto, las propiedades de las funciones lineales.

1.10 Ley de Hooke generalizada

Aplicaremos en este apartado la ley de Hooke, que establece la proporcionalidad entre fuerzas (acciones) y desplazamientos (efectos), a la relación existente entre tensiones y deformaciones actuantes en un punto. Enunciada de esta forma, se le llama *ley de Hooke generalizada*, y los coeficientes de proporcionalidad que aparecen son constantes características del material, y no dependen de la geometría del cuerpo, ya que el estado tensional y de deformación son propios de un punto.

Asimismo, admitiremos en todos nuestros desarrollos que los cuerpos son mecánicamente isótropos, es decir, que sus propiedades mecánicas son iguales en todas las direcciones. Esta hipótesis de isotropía mecánica no se cumple exactamente en algunos materiales de construcción tales como la madera, que es fibrosa, ni en las rocas estratificadas, ni en materiales fabricados mediante un proceso de laminación, etc. A pesar de ello, los resultados que se obtienen con esta hipótesis son satisfactorios en la mayoría de los casos.

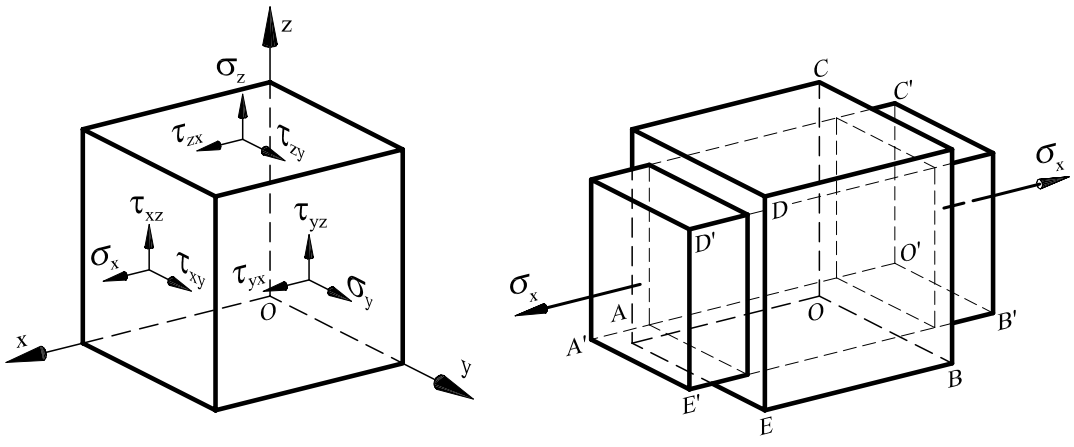

Fig. 1.16: Elemento diferencial de volumen y deformación bajo tensión normal

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Consideremos un elemento diferencial de volumen sobre cuyas caras actúan las correspondientes componentes de tensión (Figura 1.16). Para estudiar la deformación del elemento, se utiliza el principio de superposición, sumando las deformaciones producidas por las distintas componentes de tensión actuando por separado. En virtud de la hipótesis de isotropía mecánica, supondremos que estas deformaciones son independientes de la orientación de los ejes de referencia escogidos.

Supongamos primero que sobre el elemento diferencial sólo actúa la componente σ_x de tensión normal, sobre dos caras opuestas. Experimentalmente se comprueba que, en materiales isótropos, las tensiones normales no producen deformación angular y sólo originan deformaciones lineales según las aristas del paralelepípedo (Figura 1.16b). De acuerdo con la ley de Hooke, estas deformaciones lineales serán proporcionales a las tensiones σ_x que las producen, es decir:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x_1} &= \frac{\overline{O'A'} - \overline{OA}}{\overline{OA}} = \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_{y_1} &= \frac{\overline{O'B'} - \overline{OB}}{\overline{OB}} = -\nu\epsilon_{x_1} = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_{z_1} &= \frac{\overline{O'C'} - \overline{OC}}{\overline{OC}} = -\nu\epsilon_{x_1} = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \end{aligned} \tag{1.35}$$

donde E es el módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young, una propiedad del material que se determina experimentalmente. Es claro en las expresiones (1.35) que las dimensiones del módulo de elasticidad son de fuerza por unidad de superficie $[FL^{-2}]$. El módulo de elasticidad fue introducido por R. Young en 1803, aunque su definición moderna se debe a L. Navier (1826). En la Tabla 7.1 figuran valores medios del módulo de elasticidad de algunos materiales utilizados en construcción, ingeniería civil y mecánica.

En las expresiones anteriores se observa que el alargamiento longitudinal unitario ϵ_{x_1} va acompañado de contracciones laterales unitarias $\epsilon_{y_1}, \epsilon_{z_1}$, proporcionales a ϵ_{x_1},

Material	E [GPa]	Material	E [GPa]
Acero	210	Hormigón	20
Cobre	120	Cinc	100
Latón	100	Duraluminio	70
Bronce	110	Aluminio	76
Granito	50	Fundición	170
Madera	10	Estaño	40

Tabla 1.1: Módulo de Young para diferentes materiales

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

siendo ν un coeficiente de proporcionalidad adimensional llamado *coeficiente de Poisson* (S. D. Poisson, 1829) que es una constante física del material. En el acero el valor del coeficiente de Poisson ν es igual a $0,3$ y en el hormigón vale entre $0,15$ y $0,20$.

De forma análoga, la actuación de la componente normal de tensión σ_y produce unas deformaciones longitudinales y transversales de valor:

$$\epsilon_{y_2} = \frac{\sigma_y}{E} \qquad \epsilon_{z_2} = \epsilon_{x_2} = -\nu\frac{\sigma_y}{E} \tag{1.36}$$

y la actuación de la componente normal de tensión σ_z produce unas deformaciones:

$$\epsilon_{z_3} = \frac{\sigma_z}{E} \qquad \epsilon_{y_3} = \epsilon_{x_3} = -\nu\frac{\sigma_z}{E} \tag{1.37}$$

Aplicando el principio de superposición, la deformación lineal según el eje x debida a la acción conjunta de las tensiones normales $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ será $\epsilon_x = \epsilon_{x_1} + \epsilon_{x_2} + \epsilon_{x_3}$. Análogamente ocurrirá para las deformaciones lineales ϵ_y y ϵ_z. Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \tag{1.38}$$

Consideremos ahora las deformaciones que las componentes tangenciales de la tensión producen en el paralelepípedo elemental. Experimentalmente se comprueba que, en un material mecánicamente isótropo, la actuación de cada uno de los pares de tensiones tangenciales recíprocos (esto es, τ_{xy} y τ_{yx} , τ_{yz} y τ_{zy} , τ_{xz} y τ_{zx}) produce una deformación angular ($\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, respectivamente) que transforma dicho paralelepípedo recto en uno oblícuo (ver Figura 1.17).

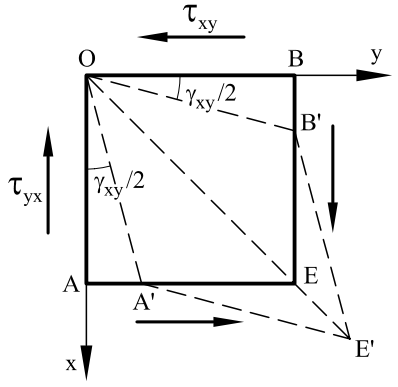

Fig. 1.17: Deformación bajo tensión tangencial

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Según la ley de Hooke, las distorsiones producidas serán proporcionales a la tensión tangencial actuante:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \tag{1.39}$$

donde G es una constante física del material que se llama módulo de elasticidad transversal o módulo de rigidez a cortante y tiene las dimensiones $[FL^{-2}]$.

Las ecuaciones (1.38) y (1.39) constituyen la expresión analítica de la ley de Hooke generalizada para un material isótropo. Estas ecuaciones pueden invertirse para obtener las componentes del estado de tensiones en función del estado de deformaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\epsilon_{vol} + 2\mu\epsilon_x & \qquad \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda\epsilon_{vol} + 2\mu\epsilon_y & \qquad \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda\epsilon_{vol} + 2\mu\epsilon_z & \qquad \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \end{aligned} \tag{1.40}$$

donde $\epsilon_{vol} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ es la dilatación volumétrica y λ y μ son los coeficientes de Lamé, definidos por las siguientes expresiones:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.41}$$

1.10.1 Módulo de rigidez a cortante

Analicemos un elemento diferencial cuadrado $ABCD$, sometido a un estado plano de cortante puro $\tau_{xy} = \tau$, actuando en las caras del elemento (ver Figura 1.18a). Según la construcción del círculo de Mohr correspondiente (ver Figura 1.18b), las tensiones principales de este estado son $\sigma_1 = +\tau$ y $\sigma_2 = -\tau$ para direcciones formando un ángulo de $\pm\,\pi/4$ rad con el eje horizontal. Por tanto, el plano de la diagonal $\overline{BD}$ está sometido a una tracción principal de valor $\sigma_1 = +\tau$, y el plano de la diagonal $\overline{AC}$ está comprimido por una tensión principal de valor $\sigma_2 = -\tau$.

Si por comodidad se gira $\pi/4$ rad el elemento diferencial y se eligen unos ejes de referencia (x, y) alineados con las direcciones principales de tensión (ver Figura 1.19), se tiene $\sigma_x = \sigma_1 = +\tau$ y $\sigma_y = \sigma_2 = -\tau$. En esta situación, el alargamiento de los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ es igual al acortamiento de los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$. Puede escribirse que:

$$\overline{OA'} = \overline{OA}\,(1+\epsilon_x) \tag{1.42a}$$

$$\overline{OB'} = \overline{OB}\,(1+\epsilon_y) \tag{1.42b}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

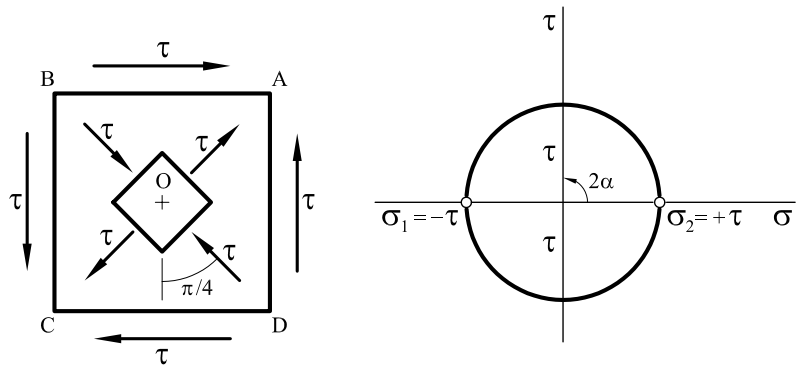

Fig. 1.18: (a) Estado de cortante puro (b) Círculo de Mohr

Despreciando infinitésimos de segundo orden, las longitudes $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ no cambian, pero sí lo hacen los ángulos entre los segmentos. Así, el ángulo $\widehat{OAB}$ cambia al $\widehat{OA'B'}$, cuya tangente vale:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{OB}\,(1+\epsilon_y)}{\overline{OA}\,(1+\epsilon_x)}=\frac{1+\epsilon_y}{1+\epsilon_x} \tag{1.43}$$

ya que $\overline{OA}=\overline{OB}$. Por la ley de Hooke generalizada, y recordando que $\sigma_x=\tau$ y $\sigma_y=-\tau$, se tiene:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y) = +\frac{1+\nu}{E}\,\tau \tag{1.44a}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x) = -\frac{1+\nu}{E}\,\tau \tag{1.44b}$$

Además:

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right) &= \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\gamma}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma}{2}}\\ &\simeq \frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}}\end{aligned} \tag{1.45}$$

para ángulos $\gamma/2$ pequeños. Igualando las ecuaciones (1.43) y (1.45) se tiene:

$$\frac{\gamma}{2}=\frac{1+\nu}{E}\,\tau \tag{1.46}$$

y recordando que $\gamma=\tau/G$ se tiene que:

$$G=\frac{E}{2\,(1+\nu)} \tag{1.47}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

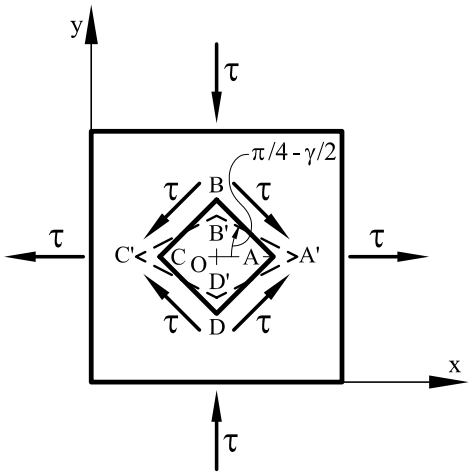

Fig. 1.19: Distorsión bajo estado de cortante puro

donde G es el módulo de rigidez a cortante. Se observa que su valor es igual a μ, el segundo coeficiente de Lamé. Por tanto, un material elástico isótropo viene caracterizado por cualquiera de los pares de constantes físicas (E, ν), (E, G) ó (λ, μ).

Por intuición física y razones termodinámicas, el módulo de rigidez a cortante debe ser positivo, por lo tanto debe ser $\nu \geq -1,0$. Sin embargo, no se han medido coeficientes de Poisson negativos en ningún material. El valor mínimo de ν, medido experimentalmente, es el del berilio ($\nu = 0,01 \div 0,05$).

1.10.2 Módulo de elasticidad volumétrico

Consideremos un paralelepípedo diferencial de lados (dx, dy, dz) sometido a la acción de tensiones normales $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ actuando sobre sus caras. La deformación lineal según los ejes (x, y, z) es igual a $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ (Figura 1.20). En consecuencia, el volumen del elemento experimenta una variación unitaria igual a:

$$\frac{dV'}{dV} = \frac{(1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(1+\epsilon_z)}{1} \tag{1.48}$$

donde $dV = dxdydz$ es el volumen inicial y $dV' = (1+\epsilon_x)dx(1+\epsilon_y)dy(1+\epsilon_z)dz$ es el volumen después de la deformación.

Si se desprecian infinitésimos de orden superior, esta variación es igual a:

$$\frac{dV'}{dV} = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{1.49}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

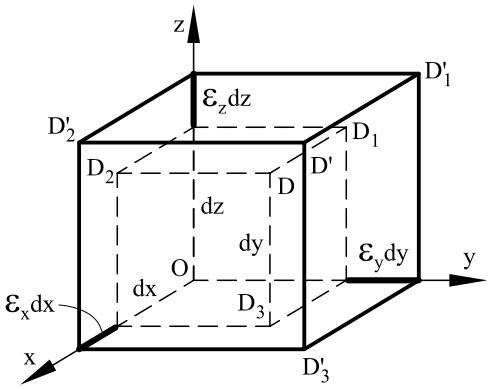

Fig. 1.20: Deformación bajo tensiones normales

De la relación anterior se observa que la dilatación cúbica, es decir, el incremento unitario de volumen, es igual a:

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \epsilon_{vol} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \tag{1.50}$$

Para obtener la expresión de esta dilatación volumétrica en función de las tensiones actuantes, se suman las igualdades (1.38) de la ley de Hooke generalizada, es decir:

$$\epsilon_{vol} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{1.51}$$

Si el estado tensional a que está sometido el paralelepípedo elemental es tal que se cumple que $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$ (estado de presión hidrostática), entonces el valor de la dilatación volumétrica es igual a:

$$\epsilon_{vol} = 3\frac{(1-2\nu)}{E}\,p = \frac{p}{K} \tag{1.52}$$

donde:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{1.53}$$

es una constante física del material que se llama módulo de elasticidad volumétrico, y tiene dimensiones $[FL^{-2}]$.

Por intuición física y razones termodinámicas, el módulo de elasticidad volumétrico debe ser positivo, lo cual implica que $\nu \leq 1/2$. Es decir, que en cualquier material isótropo el coeficiente de Poisson debe ser necesariamente inferior a $0,5$, que corresponde al límite de comportamiento incompresible ($K = \infty$).

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

1.11 Relación tensión-deformación. Estudio experimental

La relación real entre tensión y deformación de un material se determina de forma experimental mediante ensayos en laboratorio. Los ensayos más simples de realizar son los de tracción o de compresión pura sobre probetas cilíndricas o prismáticas normalizadas. Estos ensayos se realizan aplicando en los extremos de la probeta una fuerza P en dirección del eje de la misma. Llamando A al área inicial de la sección transversal de la probeta, se define como tensión nominal (media) a la relación:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.54}$$

Por otro lado, llamando L a la longitud calibrada de la probeta y ΔL al alargamiento de ésta producida por la fuerza axial, se define como deformación axial nominal a la relación:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \tag{1.55}$$

Si en el ensayo se mide también la variación Δd de una de las dimensiones transversales de la probeta, de longitud inicial d, se puede calcular la deformación transversal nominal como:

$$\epsilon_t = \frac{\Delta d}{d} \tag{1.56}$$

El ensayo se realiza aumentando progresivamente la fuerza P aplicada de forma lenta y gradual y midiendo los alargamientos axiales ΔL y los acortamientos transversales Δd correspondientes a cada nivel de carga. A partir de los conjuntos de valores (P, ΔL, Δd) obtenidos, se calculan los correspondientes conjuntos de valores de tensión y deformación nominales (σ, ϵ, ϵ_t). Los pares (σ, ϵ) se representan en una curva que se denomina curva de tensión-deformación del material (Figura 1.22).

La curva tensión-deformación obtenida depende de multitud de factores (velocidad de aplicación de la carga, temperatura, dispositivo experimental empleado, etc.) por lo que los ensayos deben realizarse de forma normalizada, con equipos estandarizados y en condiciones controladas. De esta forma se consigue que los resultados sean representativos de la estructura interna característica del material ensayado.

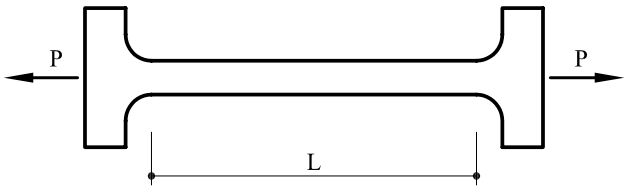

Fig. 1.21: Ensayo de tracción uniaxial

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

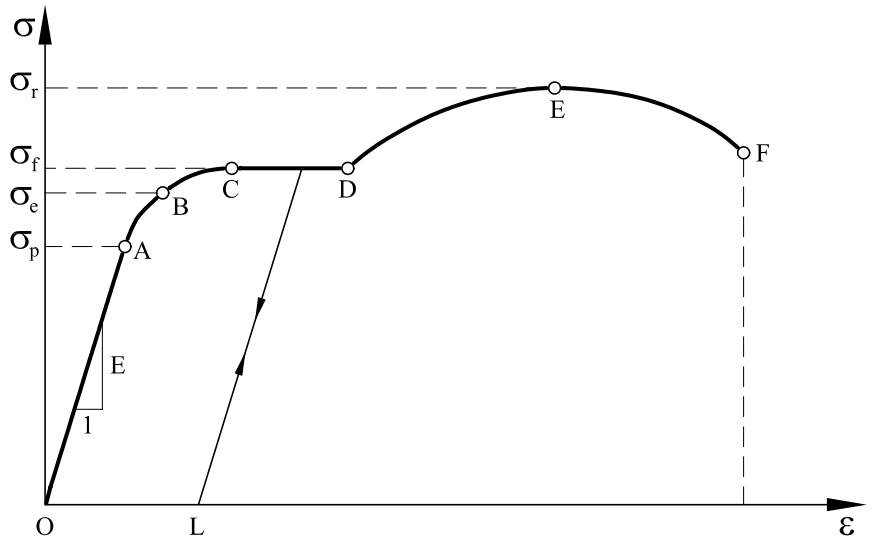

Fig. 1.22: Curva tensión–deformación uniaxial

Aunque el comportamiento de cada material es diferente, en la curva tensión-deformación se distinguen, en general, las zonas y tensiones límite siguientes:

- *Tramo proporcional (OA).* En este tramo inicial se cumple la ley de Hooke, es decir, la relación entre tensión y deformación es lineal para tensiones inferiores al valor σ_p que se llama *límite de proporcionalidad.* La pendiente del tramo determina el valor del módulo de elasticidad o de Young (E) del material. El coeficiente de Poisson puede calcularse como la relación entre la deformación transversal y la longitudinal, $\nu = -\epsilon_t/\epsilon$.

- *Tramo elástico (OB).* En este tramo la descarga se produce de forma elástica, es decir, sin que aparezcan deformaciones permanentes al disminuir la carga hasta anularla. Se llama *límite elástico* (σ_e) a la máxima tensión que se puede alcanzar sin que se produzcan deformaciones permanentes, también llamadas inelásticas o plásticas. El tramo AB, de comportamiento elástico *no lineal*, puede ser más o menos observable dependiendo del material.

- *Tramo plástico (BD).* En este tramo se observa deformación permanente al descargar la probeta, por ejemplo la marcada OL en el diagrama. Se llama *límite de fluencia* (σ_f) a la tensión a partir de la cual el material se deforma casi sin aumento de la tensión.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

- *Tramo de fluencia (CD).* En este tramo la deformación aumenta sin que se produzca un aumento apreciable de la tensión. Hasta llegar al punto D la deformación longitudinal y las deformaciones transversales son sensiblemente uniformes a lo largo de la longitud útil de la probeta.

- *Tramo de endurecimiento por deformación (DE).* A partir de un determinado valor de la deformación, la tensión necesaria para seguir aumentando la deformación plástica se incrementa. A este fenómeno se le llama *endurecimiento por deformación* y suele venir acompañado por la pérdida del estado uniforme de deformaciones y el inicio de la localización de éstas en la zona media de la probeta.

- *Tramo de estricción (EF).* En este tramo se observa que la sección de una parte de la probeta comienza a disminuir de forma apreciable. Este fenómeno de localización de las deformaciones longitudinales y transversales, con pérdida del estado uniforme anterior, se denomina *estricción.* La aparente pérdida de tensión en este tramo se debe a la definición nominal de la tensión, que está calculada sobre el área inicial de la probeta, en lugar de calcularla sobre el área real en cada momento, y que es menor debido a la estricción. Se denomina *tensión de rotura* (σ_r) a la máxima tensión medida en el ensayo.

El tipo de curva tensión-deformación descrito corresponde a los materiales llamados *dúctiles*, como por ejemplo el acero o el cobre, que presentan un marcado comportamiento plástico y alcanzan la rotura con un nivel elevado de deformación. Así, para estos materiales, $\epsilon_D \simeq 20\,\epsilon_A$ y $\epsilon_F \simeq 200\,\epsilon_A$, y los tramos descritos son fácilmente identificables.

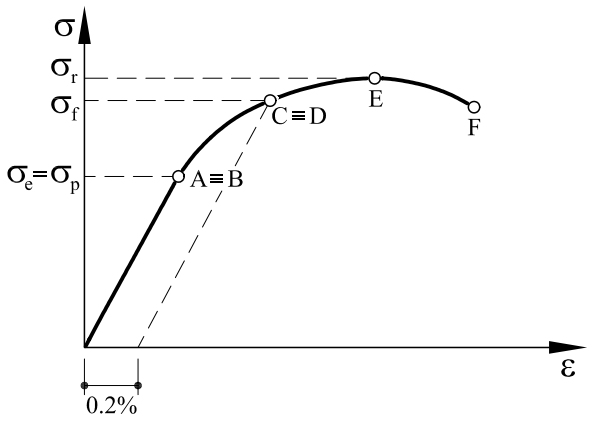

Fig. 1.23: Curva tensión–deformación para materiales frágiles

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

En otros materiales como, por ejemplo, la fundición, el hormigón o el vidrio, llamados *frágiles*, no se presenta una zona de fluencia plástica bien definida. En estos materiales se toma convencionalmente como tensión de fluencia, σ_f, la correspondiente a una deformación permanente de 0,2 % (Figura 1.23). Estos materiales rompen con poca deformación ($\epsilon_F \simeq 5\ \epsilon_A$), bruscamente, circunstancia peligrosa para la seguridad de las estructuras.

No obstante lo dicho, no es del todo riguroso calificar a un material concreto como dútil o frágil, ya que el comportamiento mecánico depende en gran medida de las condiciones de carga. Así, un acero dúctil en condiciones "normales" puede mostrar un comportamiento marcadamente frágil a bajas temperaturas o a altas velocidades de carga. Por otra parte, el hierro fundido o el vidrio muestran un comportamiento dúctil a altas temperaturas.

Debe señalarse también que muchos materiales frágiles exhiben resistencias muy diferentes según estén solicitados a tracción o a compresión. Así por ejemplo, el hormigón y la mayoría de las rocas naturales tienen un comportamiento muy frágil a tracción con una resistencia relativamente baja. Por otro lado, su comportamiento a compresión es mucho más dúctil, aunque sin mostrar una zona clara de fluencia, y su resistencia a compresión es mucho mayor que a tracción, del orden de 10 veces mayor, tal como se muestra en la Figura 1.24.

Los aceros de construcción, en cambio, tienen un comportamiento parecido en tracción y en compresión (para piezas poco esbeltas), y con marcados tramos de fluencia en

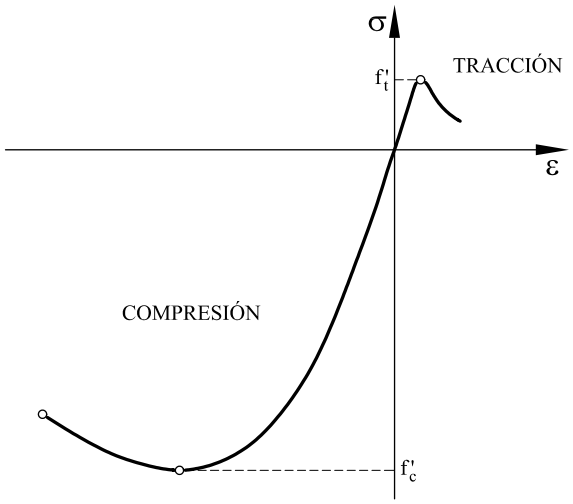

Fig. 1.24: Curva tensión–deformación para el hormigón

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

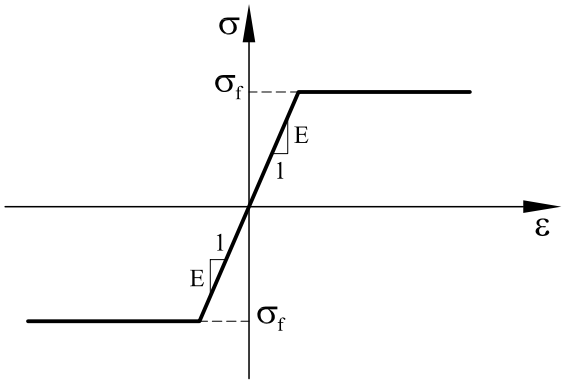

Fig. 1.25: Curva tensión–deformación idealizada para el acero de construcción

ambos casos. Para estos materiales la curva tensión-deformación se suele representar mediante diagramas trilineales (Figura 1.25), en los que sólo se consideran los tramos proporcionales y los tramos de fluencia. Otros tipos de aleación de acero, por su parte, apenas muestran un tramo horizontal de fluencia, pero tienen una zona clara de endurecimiento por deformación, habitualmente lineal.

1.12 Tensión límite, tensión admisible y coeficiente de seguridad

El lógico requisito de seguridad exigible a las estructuras que se proyectan y se construyen conlleva la definición de un valor superior de la tensión que el material puede alcanzar sin que exista riesgo de que se produzca un fallo estructural, ya sea éste total o parcial. Así, se define *tensión límite*, σ_{lim}, como aquel valor de la tensión al cual el material alcanza su límite de resistencia, y por debajo del cual no se producen ni deformaciones excesivas ni, por supuesto, la rotura del mismo. En los materiales dúctiles, tales como el acero, es habitual considerar como tensión límite la tensión de fluencia ($\sigma_{\text{lim}} = \sigma_f$), mientras que en los materiales frágiles, como el hormigón, se suele considerar como tensión límite la tensión de rotura ($\sigma_{\text{lim}} = \sigma_r$).

Sin embargo, en la práctica, las estructuras se diseñan para trabajar a niveles de tensión significativamente por debajo de la tensión límite de los correspondientes materiales estructurales. Los motivos para esta práctica son varios, y fundamentalmente debidos a la existencia de incertidumbres que el proyectista debe contemplar en la fase de diseño:

- *incertidumbres asociadas a la caracterización de las propiedades mecánicas de los materiales*, debidas a la calidad y homogeneidad del material, a la dispersión en

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

los ensayos experimentales, a la adecuación de éstos a las condiciones reales de servicio, a fenómenos de fluencia y relajación, degradación debida a causas físicas o químicas, a efectos cíclicos o dinámicos, fatiga, etc.

- *incertidumbres asociadas a la definición y caracterización de las acciones*, ya sea por la insuficiencia de datos para estimarlas (efectos climáticos y ambientales, efectos sísmicos), por su insuficiente definición en la fase de proyecto (cargas de servicio o cargas excepcionales), por la variabilidad temporal de su naturaleza, por el desconocimiento de su evolución durante la vida útil de la estructura, etc.

- *incertidumbres asociadas a los métodos de cálculo*, ya sea por las hipótesis simplificativas adoptadas en las bases de cálculo, por la propia naturaleza de los métodos de análisis o por la dificultad asociada a éstos en caso de utilizar métodos sofisticados.

- *incertidumbres asociadas a los métodos de construcción*, y que pueden estar relacionadas con el proceso constructivo previsto, los procedimientos de ejecución y de control de calidad empleados, etc.

- *incertidumbres asociadas a los métodos de conservación y mantenimiento*, que pueden reflejarse en fenómenos de degradación progresiva, corrosión, agresiones ambientales, etc.

En consecuencia, se define *tensión admisible*, $\sigma_{\rm adm}$, de la forma

$$\sigma_{\rm adm} = \frac{\sigma_{\rm lim}}{n} \leq \sigma_{\rm lim} \tag{1.57}$$

donde $\sigma_{\rm lim}$ es la tensión límite del material y n es un coeficiente mayor (o excepcionalmente igual) que la unidad denominado *coeficiente de seguridad*. Las estructuras se diseñan, por tanto, con el criterio de que la tensión en cualquier punto sea inferior al valor de la tensión admisible; es decir, si $\sigma_{\rm max}$ es el valor máximo de la tensión en la estructura, debe cumplirse que

$$\sigma_{\rm max} \leq \sigma_{\rm adm} \leq \sigma_{\rm lim} \tag{1.58}$$

La determinación del coeficiente de seguridad depende de un gran número de factores, pero éste debe ser mayor cuanto mayor sea el grado de incertidumbre en la fase de proyecto o cuanto mayor sea el impacto, en términos socio–económicos, que acarrearía un eventual fallo estructural. El coeficiente de seguridad puede reducirse en estructuras de poca complejidad o de vida útil reducida. En cualquier caso, este coeficiente se fija según la experiencia adquirida en estructuras análogas y en el nivel tecnológico

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

aplicable. En edificación e ingeniería de la construcción se usan coeficientes de seguridad entre 2 y 5, adoptándose valores más altos para la construcción *in situ* que para la prefabricación. En ingeniería aeronaútica se usan, necesariamente, coeficientes de seguridad menores, entre 1,5 y 2, pero asociados a métodos de análisis, construcción, conservación y control mucho más complejos.

1.13 Tensión equivalente y criterios de resistencia

En la Sección anterior se ha introducido el concepto de *tensión admisible* y, también, el de *coeficiente de seguridad*, en relación al de *tensión límite*. Este último se define usualmente para los diversos materiales en función de ensayos de resistencia en que el estado tensional es fundamentalmente uniaxial. Sin embargo, es habitual en los casos de interés en Mecánica de Sólidos y en Cálculo de Estructuras que los materiales trabajen en estados bidimensionales o tridimensionales de tensión. Esto implica la necesidad de redefinir el concepto de tensión límite de forma que sea utilizable bajo carga multiaxial. La dificultad estriba en la dificultad práctica de realizar ensayos bajo estados de carga complejos, por un lado, y la multiplicidad de combinaciones de tensiones a considerar, por otro. Debido a ello, es habitual medir el nivel de solicitación de un material a través del concepto de *tensión (uniaxial) equivalente*, σ_{eq}.

Se define como *tensión equivalente* (o *de comparación*) de un estado multiaxial de tensiones a un valor escalar, función de las componentes del tensor de tensiones (o de los valores de las tensiones principales de éste), que puede correlacionarse con los valores de tensión en un ensayo uniaxial. Así, dos estados multiaxiales de tensión son *equivalentes* a efectos de resistencia si les corresponden idénticas tensiones equivalentes. En particular, un estado multiaxial es *equivalente* a un estado uniaxial en el que actúa una tensión igual a la tensión equivalente del primero.

El concepto de *tensión equivalente* permite aplicar a los estados multiaxiales los mismos criterios de seguridad que en estados uniaxiales. Así, se exige que la máxima tensión equivalente en la estructura no supere el valor de la tensión admisible, definida aplicando un determinado coeficiente de seguridad a la tensión límite uniaxial:

$$(\sigma_{\mathrm{eq}})_{\max} \leq \sigma_{\mathrm{adm}} = \frac{\sigma_{\mathrm{lim}}}{n} \tag{1.59}$$

De esta forma, el problema de dimensionar estructuras sometidas a estados generales de tensión se reduce a definir adecuadamente las tensiones equivalentes, evaluarlas y compararlas con el valor admisible.

En la práctica ingenieril se usan diversas definiciones empíricas de la tensión equivalente, que se adecuan en mayor o menor grado a los diferentes materiales empleados.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

A estas definiciones se les denomina *criterios de resistencia*. Los más habituales son los siguientes:

(a) Criterio de Rankine

Según este criterio, el material falla cuando el máximo valor absoluto de una de las tensiones principales alcanza un valor igual a la tensión límite. Es decir, si las tensiones principales son $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, la tensión equivalente es

$$\sigma_{\text{eq}} = (|\sigma_i|)_{\max} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.60}$$

Este criterio suele emplearse para materiales como el hormigón, en aquellas situaciones en que el fallo del material se produce predominantemente a tracción, según el llamado modo I de fractura.

(b) Criterio de Tresca

Según este criterio, el material falla cuando la tensión tangencial máxima alcanza el valor correspondiente a la tensión tangencial máxima en el ensayo uniaxial. Es decir, si las tensiones principales son $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, entonces la tensión tangencial máxima debe ser

$$\tau_{\max} \leq \frac{\sigma_{\text{eq}}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{1.61}$$

o sea, que la tensión equivalente se define como

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - \sigma_3 \tag{1.62}$$

Este criterio es adecuado para materiales dúctiles sometidos a esfuerzos de cortante elevados y que son insensibles al nivel de presión hidrostática.

(c) Criterio de Von Mises

Según este criterio, el material falla cuando la energía de deformación (ver el Libro 2) asociada a procesos de deformación de distorsión alcanza el valor correspondiente a la energía de distorsión límite en el ensayo uniaxial. Según esta hipótesis, la tensión equivalente es

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 \right]} \tag{1.63}$$

Este criterio es adecuado para materiales dúctiles como los aceros de construcción, que son insensibles al nivel de presión hidrostática, en aquellas situaciones en que el fallo del material se produce predominantemente por cizalladura, según el llamado modo II de fractura.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

(d) Criterio de Mohr–Coulomb

Este criterio puede considerarse una generalización del criterio de Tresca para aquellos materiales que son sensibles al nivel de confinamiento, o sea, a la presión hidrostática. La tensión equivalente se define como

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \tag{1.64}$$

donde $k = (\sigma_{\text{lim}})_t/(\sigma_{\text{lim}})_c$ es la relación entre las tensiones límite a tracción y compresión. Este criterio es adecuado tanto para materiales frágiles como dúctiles, y se suele aplicar a los *geomateriales* o *materiales friccionales*, tales como el hormigón o los suelos, que presentan una marcada diferencia entre las resistencia a tracción y compresión.

En la Figura 1.26 se muestra gráficamente la diferencia entre los diversos criterios de fallo introducidos. Para un estado plano de tensiones, $\sigma_3 = 0$, se representan los lugares geométricos de las combinaciones de valores de tensiones principales σ_1,σ_2 que determinan un valor límite de la correspondiente tensión equivalente. Puede decirse que el "interior" de las curvas así definidas corresponde a situaciones elásticas, es decir, sin riesgo de fallo. El "exterior" de dichas curvas corresponde a estados de tensión imposibles de alcanzar por el material en cuestión.

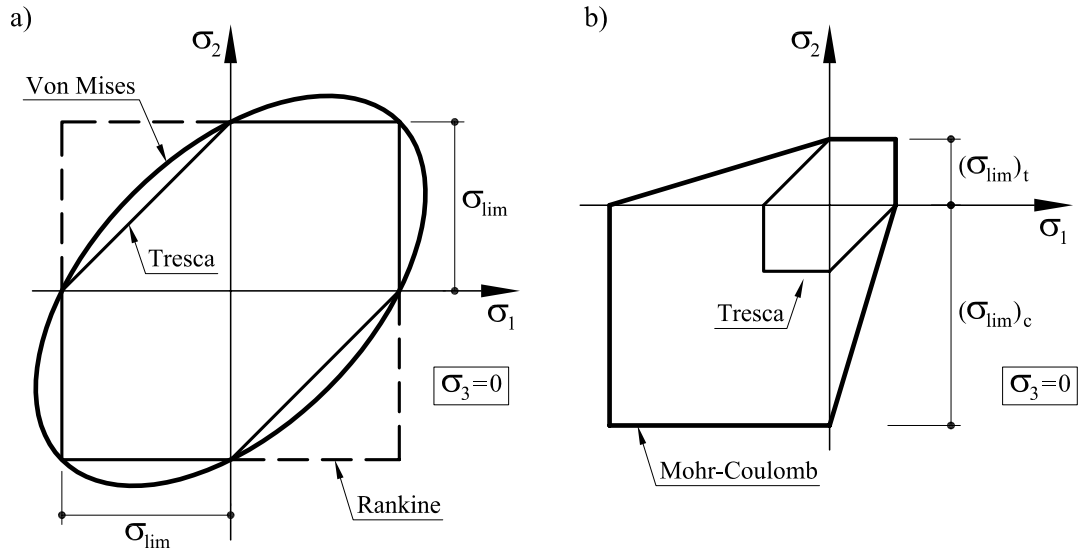

Fig. 1.26: Estado plano de tensiones: (a) criterios de Rankine, Tresca y Von Mises, (b) criterios de Tresca y Mohr–Coulomb

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

En la Figura 1.26a se comparan los criterios de Rankine, Tresca y Von Mises para un mismo valor de la tensión límite. Se observa que los criterios de Rankine y Tresca coinciden en los cuadrantes de tracción y compresión, pero difieren sensiblemente en situaciones de tracción–compresión, con cizalladura predominante. El criterio de Von Mises puede verse como una versión "redondeada" del criterio de Tresca. En la Figura 1.26b se comparan los criterios de Tresca y Mohr–Coulomb para un mismo valor de la tensión límite de tracción. El criterio de Mohr–Coulomb puede verse como una generalización del criterio de Tresca mucho más aproximada al comportamiento real de los geomateriales.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

2 Fundamentos de Resistencia de Materiales

2.1 Introducción

La Resistencia de Materiales y, por extensión, la Mecánica de Estructuras pueden considerarse como aquella parte de la Mecánica de Sólidos que resulta de aplicar la Teoría de la Elasticidad a un tipo restringido de problemas que se plantean en el día a día de la Ingeniería Estructural para posibilitar su resolución de forma analítica. Esta categoría de problemas viene definida, fundamentalmente, por:

- *La restricción en la definición del problema elástico.* Esta restricción afecta a la geometría de los elementos estructurales, a sus condiciones de sustentación y vinculación y al tipo de acciones consideradas. Así, la Resistencia de Materiales se aplica a piezas prismáticas (vigas, columnas, barras, ejes, etc.) que están apoyadas, articuladas o empotradas y sometidas a la acción de fuerzas puntuales o repartidas, descensos de apoyos, cargas térmicas, etc.

- *La adopción de ciertas hipótesis fundamentales.* Estas hipótesis permiten, por un lado, definir un problema lineal y, por otro, abordar un problema inicialmente tridimensional (las piezas tienen longitud, altura y anchura) como un "ensamblaje" de problemas básicamente unidimensionales (las piezas se representan como líneas).

Se presentan en este Capítulo, en forma breve, los fundamentos de las dos disciplinas mencionadas. Se introducen, primero, conceptos elementales como el de pieza, estructura, apoyo, enlace, etc., y después otros de importancia fundamental como los de esfuerzos sobre una sección, estructuras isostáticas e hiperestáticas, leyes de esfuerzos, etc. En la última Sección se introduce la problemática asociada a la resolución de estructuras hiperestáticas; para ello, se discuten los requisitos de equilibrio y compatibilidad de la solución y se plantean, en función de éstos, las bases de los métodos de solución de estructuras hiperestáticas.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

2.2 Objetivo de la Resistencia de Materiales

La Resistencia de Materiales, como parte integrante de la Mecánica de Estructuras, tiene como objetivo fundamental determinar la respuesta de las estructuras cuando éstas se ven sometidas a las diferentes acciones que deben soportar durante su construcción y vida útil.

Por "respuesta estructural" se entiende, básicamente, la determinación de los estados de tensión y deformación a los que la estructura va a estar sometida por efecto de los diferentes estados de carga que se consideran. La determinación de los estados de tensión es necesaria para comprobar la satisfacción de los criterios de *resistencia* que establecen las correspondientes normativas y los usos de buena práctica, de cara a garantizar la *seguridad* de las estructuras. Por su parte, la determinación de los estados de deformación suele ser necesaria para satisfacer los criterios de *rigidez,* que están a menudo ligados a requisitos de *funcionalidad* de las estructuras.

Por tanto, la Resistencia de Materiales pretende establecer las condiciones de *resistencia* y *rigidez* de las estructuras analizadas. Ambos aspectos se abordan en los dos tipos de problemas fundamentales que se plantean en la práctica ingenieril: el *dimensionamiento* y la *verificación* de estructuras.

El proceso de construcción de una estructura empieza por la *concepción* de ésta. En esta fase se determina su tipología y se identifican las acciones que actuarán sobre ella. Esta identificación previa se hace de forma aproximada, ya que los valores reales de multitud de acciones dependen de la forma y dimensiones definitivas de la estructura. En ese momento entra en juego la Resistencia de Materiales para evaluar la respuesta estructural del correspondiente "prediseño estructural". En función de los resultados obtenidos, se procede al *dimensionamiento* de los elementos estructurales, es decir, a dar valores concretos a las dimensiones de éstos. Después, se pasa a la fase de *definición* del proyecto, en la cual se persigue satisfacer los requisitos previstos. En esta fase se pueden modificar o ratificar las diversas decisiones tomadas en la fase previa. En cualquier caso, se definen y concretan la tipología estructural y las acciones a considerar (peso propio,

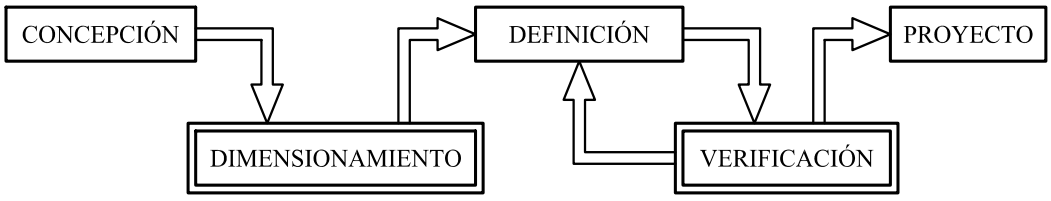

Fig. 2.1: La Resistencia de Materiales en el Análisis de Estructuras

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

cargas vivas, etc.). Se pasa entonces a la *verificación* del modelo estructural resultante. Si esta comprobación *a posteriori* del diseño estructural es satisfactoria, se elabora el *proyecto definitivo*; si no lo es, es necesario volver a la fase de definición. Se procede, pues, de forma iterativa hasta que se satisfacen adecuadamente todos los requisitos necesarios.

El proceso descrito se muestra de forma esquemática en la Figura 2.1, donde se indica el papel que la Resistencia de Materiales desempeña en él.

2.3 Concepto de pieza y estructura

Se llama *pieza prismática, viga* o *barra* al cuerpo sólido engendrado por un área plana S que se mueve en el espacio, de manera que su centro de gravedad G recorre una línea dada l y su plano se mantiene constantemente normal a dicha línea. A la línea l se le denomina *directriz, línea media* o *eje de la pieza* y a las diversas posiciones del área S se les llama *secciones rectas* o *secciones normales* de la pieza (ver Figura 2.2a).

La directriz de la pieza puede ser una curva alabeada, plana o recta, dando lugar a *piezas alabeadas* (viga en hélice), *piezas planas* (arcos, vigas balcón) o *piezas rectas* (ménsulas, columnas, etc.). La sección de la pieza puede ser constante o variable a lo largo de la pieza, dando lugar a *piezas de sección constante o variable*, respectivamente.

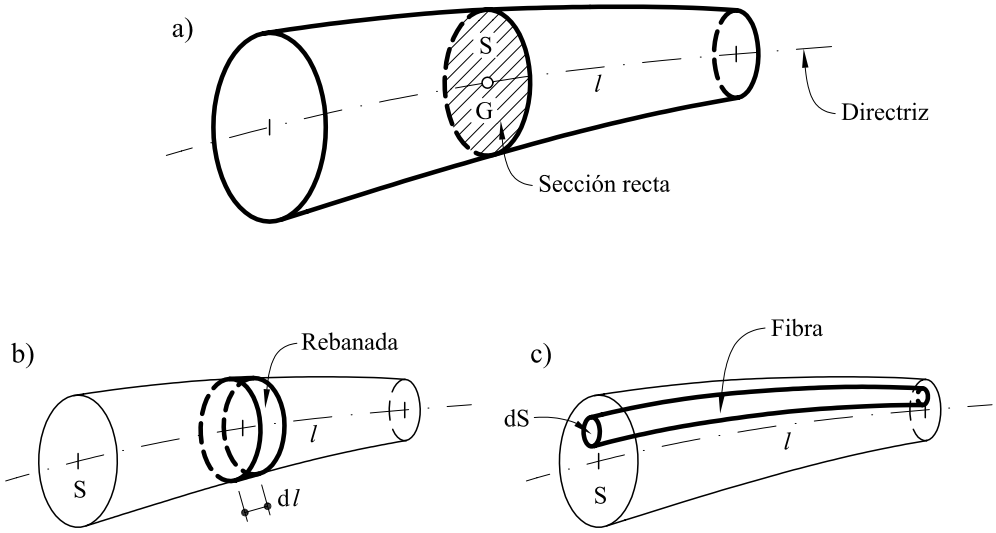

Fig. 2.2: Concepto de: (a) pieza prismática, (b) rebanada y (c) fibra

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Se llama *rebanada* al elemento diferencial de pieza contenido entre dos secciones rectas infinitamente próximas (ver Figura 2.2b). Así, se puede considerar a la viga como un sólido generado por una *sucesión* de rebanadas diferenciales. Se llama *fibra* al elemento diferencial de volumen generado por un elemento diferencial del área plana S en el movimiento que genera la pieza prismática (ver Figura 2.2c). Por tanto, se puede considerar a la viga como un sólido formado por un *haz* de fibras diferenciales. La rebanada y la fibra son los elementos diferenciales básicos de estudio en la Resistencia de Materiales.

Se llama *pieza de plano medio* a aquella pieza plana en la que la sección recta es simétrica respecto a un plano que contiene a la directriz de la pieza y que está sometida a cargas contenidas en dicho plano medio. Se llama *pieza de cilindro medio* a aquella pieza plana en la que la sección recta es simétrica respecto a un plano perpendicular al que contiene a la directriz de la pieza y que está sometida a cargas perpendiculares al plano de la directriz.

Se llama *estructura de barras* al sistema mecánico formado por el ensamblaje de piezas prismáticas. Se habla de *estructura plana* cuando las directrices de todas las piezas que forman la estructura están contenidas en un mismo plano, y de *estructura espacial* en caso contrario. Se llama *estructura de plano medio* a la estructura plana formada por piezas de plano medio, y que están sometidas a cargas contenidas en dicho plano medio. Se llama *emparrillado plano* a la estructura plana formada por piezas de cilindro medio, y que están sometidas a cargas perpendiculares a su plano medio.

En este Libro se tratarán siempre estructuras de barras y, fundamentalmente, estructuras de barras de plano medio.

2.4 Principios de la Resistencia de Materiales

La Resistencia de Materiales es una disciplina que se basa en tres principios o hipótesis fundamentales: el Principio de rigidez, el Principio de superposición y el Principio de Saint-Venant. La validez de los resultados obtenidos mediante esta teoría depende, básicamente, del grado de satisfacción de estos principios en el caso concreto en que se aplique.

2.4.1 Principio de rigidez

El Principio de rigidez es una consecuencia directa de la hipótesis de pequeños movimientos aplicada al análisis de estructuras y establece que

"las ecuaciones de equilibrio se pueden formular sobre la geometría indeformada, es decir, sin considerar los movimientos provocados por el sistema de cargas."

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

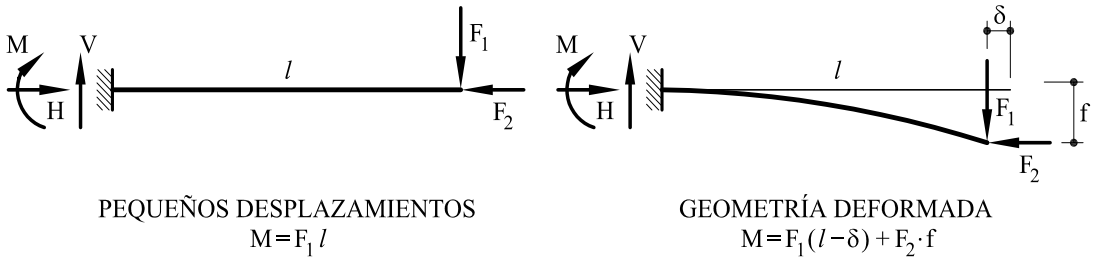

Fig. 2.3: Implicación del Principio de rigidez

Esta hipótesis implica que los movimientos de la estructura debidos al sistema de cargas sean pequeños: los desplazamientos, comparados con las dimensiones de la estructura, y los giros (en radianes), comparados con la unidad. Si esta condición no se cumple, las ecuaciones de equilibrio deben formularse en la geometría deformada, y el problema deja de ser lineal para transformarse en un problema *geométricamente* no lineal.

En la Figura 2.3 se ilustra la utilidad del Principio de rigidez. Bajo la hipótesis de pequeños movimientos (izquierda), las reacciones en el empotramiento sólo dependen de la geometría inicial y de las cargas; sin ella (derecha), las reacciones dependen de la deformación de la estructura, y ésta es desconocida *a priori*.

2.4.2 Principio de superposición

Como ya se indicó en el Capítulo anterior, si es válida la hipótesis de pequeños desplazamientos y se cumple, además, la ley de Hooke, entonces el problema es lineal. La resolución de un problema estructural lineal es mucho más sencilla que la de uno no lineal; aparte de otras dificultades de tipo práctico, *en un problema no lineal no existe, en general, garantía de que la solución exista y sea única.*

Además, si el problema es lineal puede aplicarse el Principio de superposición. Éste establece que

"los efectos que un sistema de fuerzas origina sobre una estructura son iguales a la suma de los efectos que originan cada una de las fuerzas del sistema actuando por separado".

Una consecuencia inmediata del citado principio es que el estado final (tensional y deformacional) de una estructura sometida a un sistema de fuerzas no depende del orden de aplicación de dichas fuerzas. Esto permite, por ejemplo, analizar el caso de una solicitación compleja descomponiéndola en casos más simples de estudiar. Es posible,

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

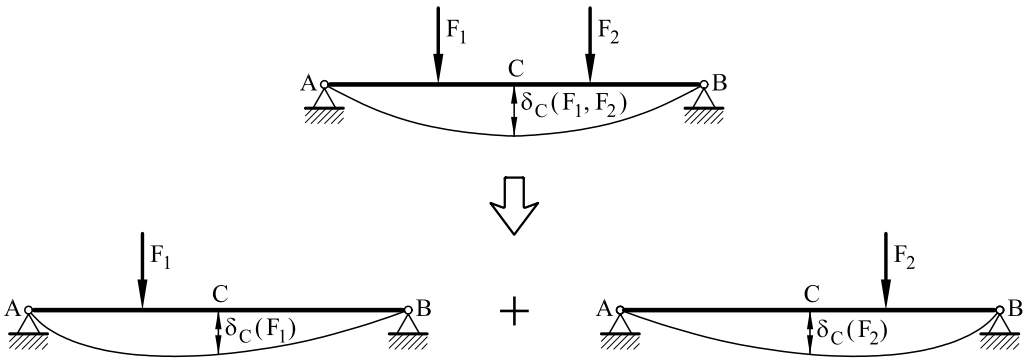

Fig. 2.4: Implicación del Principio de superposición

asimismo, la definición y el análisis de estados de carga de interés como combinación de estados de carga previamente definidos y analizados. Ambas posibilidades son utilizadas frecuentemente en Resistencia de Materiales.

Así, por ejemplo, en la Figura 2.4 se muestra una viga biapoyada sobre la que actúa un sistema de carga consistente en dos fuerzas puntuales; este sistema puede descomponerse en los dos sistemas más simples de la parte inferior de la Figura. El principio de superposición implica que las reacciones, movimientos, tensiones y deformaciones que provoca sobre la estructura el estado de cargas original es igual a la suma de las reacciones, movimientos, tensiones y deformaciones que provocan los estados en los que éste se descompone.

2.4.3 Principio de Saint-Venant

El Principio de Saint-Venant puede considerarse la verdadera piedra angular sobre la que se edifica la Resistencia de Materiales, ya que establece que

"en una pieza prismática, las tensiones que actúan sobre una sección recta, alejada de los puntos de aplicación de un sistema de cargas, sólo dependen de la fuerza y del momento resultantes de las fuerzas situadas a un lado de la sección considerada".

Esta hipótesis implica que los efectos locales (fuerzas concentradas, apoyos, variaciones de sección) sólo afectan a una zona localizada a uno y otro lado de las secciones en que se producen. La forma precisa en que se aplican las cargas o los dispositivos empleados para aplicarlas, así como la disposición constructiva concreta de los aparatos de apoyo, sólo afectan al estado tensional de esta zona localizada, de una longitud aproximadamente igual al canto de la pieza. El estudio tensional de las zonas afectadas por los efectos locales es complejo y debe hacerse mediante la Teoría de la Elasticidad.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

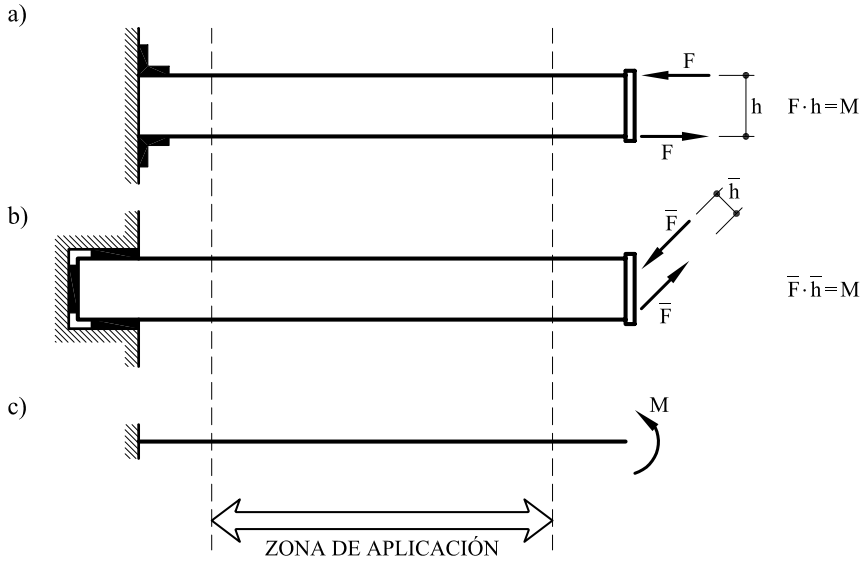

Fig. 2.5: Ilustración del Principio de Saint-Venant

En la Sección 2.5 se define el concepto de *esfuerzos sobre una sección,* precisamente, como las componentes de la fuerza y del momento resultantes de las fuerzas situadas a un lado de la sección. El cálculo de esfuerzos juega un papel fundamental en la Teoría de Resistencia de Materiales y Cálculo de Estructuras, ya que, según el Principio de Saint-Venant, las tensiones en una sección sólo dependen del valor de éstos.

En la Figura 2.5 se muestran dos ejemplos de voladizos con momento aplicado en sus extremos libres. En el primer caso, el empotramiento se consigue apoyando la viga contra el soporte y coartando el giro mediante sendos angulares soldados a ambos; el momento en el extremo es la resultante de un par fuerzas horizontales. En el segundo caso, el empotramiento se consigue encastrando adecuadamente la viga en el soporte; el momento en el extremo es la resultante de un par fuerzas inclinadas respecto al eje de la viga. En ambas situaciones, el momento resultante de las fuerzas actuantes es idéntico, mientras que la resultante de fuerzas es nula.

A pesar de que las materializaciones de las condiciones de empotramiento y de los momentos aplicados son diferentes, su idealización a efectos de cálculo es idéntica, tal como se muestra en la Figura 2.5. Según el Principio de Saint-Venant, las tensiones que aparecen en las zonas centrales de las piezas dependen, exclusivamente, del momento resultante de las fuerzas actuantes; las zonas extremas, por el contrario, se ven afectadas por los efectos locales, y la determinación de su estado tensional requerirá consideraciones más cuidadosas.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

En la práctica ingenieril, el estudio del estado tensional de un elemento estructural suele hacerse suponiendo que el Principio de Saint-Venant es aplicable a la totalidad de las secciones analizadas. El dimensionamiento de las piezas suele hacerse en función de los resultados así obtenidos. *A posteriori*, se adoptan las disposiciones constructivas necesarias para reducir o soportar de formar adecuada los efectos locales en las zonas en las que los resultados calculados en esta forma no son aplicables.

2.4.4 Restricciones geométricas

Para que los principios fundamentales enunciados se cumplan y los resultados de la Resistencia de Materiales sean válidos, las piezas deben cumplir ciertas condiciones:

- *Geometría de la directriz*. En piezas de directriz curva, los radios de curvatura de ésta deben ser grandes en relación al canto de las piezas. Si esta relación es sufucientemente pequeña, los efectos de la curvatura pueden llegar a despreciarse en el análisis del comportamiento de las rebanadas y utilizar las expresiones obtenidas para piezas de directriz recta.

- *Geometría de las secciones:*

  - *Dimensiones.* Las dimensiones transversales de las piezas, canto y ancho, deben ser pequeñas en relación a su longitud. Esto es necesario para que se cumplan el principio de Saint-Venant y las hipótesis de deformación de las secciones que se utilizan habitualmente. Por otro lado, las características geométricas de las secciones rectas deben asegurar que las piezas tengan la rigidez necesaria para que los movimientos sean pequeños. En general, son admisibles las relaciones *canto/luz* (h/l) siguientes:

$$\begin{aligned}
\frac{h}{l} &= \frac{1}{10} \text{ a } \frac{1}{12} && \text{para piezas rectas de hormigón armado} \\
\frac{h}{l} &= \frac{1}{15} \text{ a } \frac{1}{25} && \text{para piezas rectas de hormigón pretensado} \\
\frac{h}{l} &= \frac{1}{20} \text{ a } \frac{1}{35} && \text{para piezas rectas de acero laminado} \\
\frac{h}{l} &= \frac{1}{40} \text{ a } \frac{1}{100} && \text{para arcos}
\end{aligned}$$

  - *Variación.* En piezas de sección variable, la variación de las dimensiones transversales debe ser gradual y lenta. Las variaciones bruscas en las características geométricas de las secciones producen efectos locales que invalidan el principio de Saint-Venant.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

2.5 Definición de esfuerzos en una sección

Dada una viga sometida a la acción de un sistema de cargas exteriores, supondremos que una sección recta cualquiera, S, divide la pieza en dos partes, (A) y (B), situadas cada una a un lado de la sección considerada, tal como se muestra en la Figura 2.6.

El sistema de fuerzas (acciones y reacciones) que actúan sobre la viga debe estar en equilibrio estático. Si llamamos $\vec{F}_A$ al sistema de fuerzas que actúa sobre la parte (A) de la pieza y $\vec{F}_B$ al sistema de fuerzas que actúa sobre la parte (B), por equilibrio de la viga debe ser:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0 \tag{2.1}$$

Asimismo, tomando momentos respecto al centro de gravedad G de la sección S, debe cumplirse:

$$\vec{M}^G_{F_A} + \vec{M}^G_{F_B} = 0 \tag{2.2}$$

Consideremos ahora, por separado, el equilibrio de las dos partes de la pieza (A) y (B). Para que tal equilibrio exista, es necesario suponer que existen unas fuerzas de interacción que ambas partes se ejercen entre sí, a través de la superficie S. Así, la parte (B) ejercerá sobre la parte (A) unas fuerzas que podemos reducir a una resultante $\vec{R}_A$ y un momento resultante, respecto a G, $\vec{M}^G_A$. De forma análoga, la parte (A) ejerce sobre la parte (B) una fuerza resultante $\vec{R}_B$ y un momento resultante $\vec{M}^G_B$.

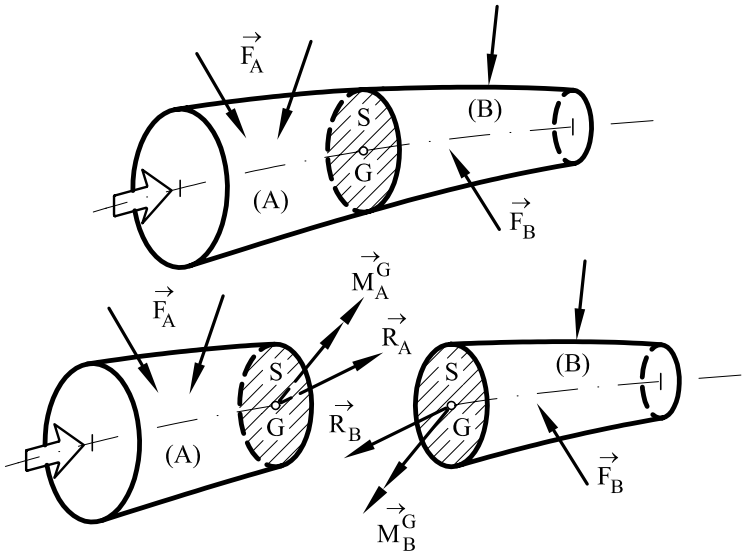

Fig. 2.6: Fuerza y momento resultantes en una sección

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Por equilibrio de la parte (A) debe ser:

$$\begin{array}{r} \vec{F}_A + \vec{R}_A = 0 \\ \vec{M}^G_{F_A} + \vec{M}^G_A = 0 \end{array} \tag{2.3}$$

Por equilibrio de la parte (B) debe ser:

$$\begin{array}{r} \vec{F}_B + \vec{R}_B = 0 \\ \vec{M}^G_{F_B} + \vec{M}^G_B = 0 \end{array} \tag{2.4}$$

Sumando las ecuaciones (2.3) y (2.4) y teniendo en cuenta el equilibrio global (ecuaciones (2.1) y (2.2)), se tiene:

$$(\vec{F}_A + \vec{F}_B) + \vec{R}_A + \vec{R}_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_A = -\vec{R}_B \tag{2.5a}$$

$$(\vec{M}^G_{F_A} + \vec{M}^G_{F_B}) + \vec{M}^G_A + \vec{M}^G_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}^G_A = -\vec{M}^G_B \tag{2.5b}$$

Por lo tanto, las acciones que una parte ejerce sobre la otra son iguales y de sentido contrario.

Llamando por simplicidad: $\vec{R} = \vec{R}_A = -\vec{R}_B$ y $\vec{M} = \vec{M}^G_A = -\vec{M}^G_B$, se tendrá también que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{R} = -\vec{F}_A = \vec{F}_B \\ \vec{M} = -\vec{M}^G_{F_A} = \vec{M}^G_{F_B} \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

Cuando la fuerza resultante $\vec{R}$ y el momento resultante $\vec{M}$ se calculan en la forma $\vec{R} = \vec{F}_B$ y $\vec{M} = \vec{M}^G_{F_B}$, es decir, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan "por delante" de S (en la parte B), el cálculo se llama *frontal*. Cuando $\vec{R}$ y $\vec{M}$ se calculan en la forma $\vec{R} = -\vec{F}_A$ y $\vec{M} = -\vec{M}^G_{F_A}$, es decir, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan "por detrás" de S (en la parte A), el cálculo se llama *dorsal*. Es evidente que ambos procedimientos conducen a resultados idénticos.

Definimos el triedro cartesiano dextrógiro xyz, con origen en el centro de gravedad G de la sección S, en el que el eje x es normal a la sección S, orientada de (A) a (B) y tangente a la directriz de la viga, y los ejes (y, z) son los ejes principales de inercia de la sección S (ver Figura 2.7). Proyectando la fuerza resultante $\vec{R}$ sobre estos ejes se define como:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Esfuerzo Axil } N \\ \text{Esfuerzo Cortante } T_y \\ \text{Esfuerzo Cortante } T_z \end{array}\right\} \text{ a la proyección de } \vec{R} \text{ según el eje } \left\{\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right.$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

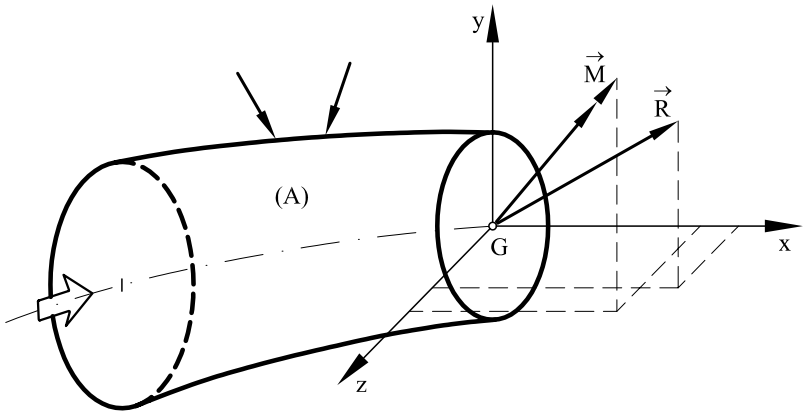

Fig. 2.7: Definición de esfuerzos en una sección

Análogamente, proyectando el momento resultante $\vec{M}$ sobre los ejes, se define como:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Momento Torsor } M_t\\ \text{Momento Flector } M_y\\ \text{Momento Flector } M_z\end{array}\right\} \text{ a la proyección de } \vec{M} \text{ según el eje } \left\{\begin{array}{c}x\\ y\\ z\end{array}\right.$$

2.6 Relación entre esfuerzos y tensiones

Las resultantes $\vec{R}$ y $\vec{M}$, y sus respectivas componentes, es decir, los esfuerzos en la sección, son las resultantes estáticas de las *tensiones* que actúan sobre la sección S. Tal como se definió en el Capítulo anterior, dichas tensiones son las fuerzas de interacción que una parte de la viga ejerce sobre la otra, definidas por unidad de superficie de la sección S.

Así, tal como se muestra en la Figura 2.8, sobre un diferencial de área dS, de la sección S, actuará una tensión $\vec{t}$, que puede descomponerse en una tensión normal σ_x, según el eje x, y una tensión tangencial τ sobre la sección S. La tensión tangencial puede descomponerse, a su vez, en sus componentes cartesianas según los ejes $(y,\ z)$, dando las tensiones τ_{xy}, τ_{xz}, respectivamente.

Para que $\vec{R}$ y $\vec{M}$ formen un sistema equivalente al sistema de fuerzas internas diferenciales $\vec{t}\,dS$, deben cumplirse las siguientes relaciones vectoriales:

$$\vec{R} = \int_S \vec{t}\,dS \qquad ; \qquad \vec{M} = \int_S \vec{r} \times \vec{t}\,dS \tag{2.7}$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición de dS respecto al centro de gravedad de la sección, con componentes $\vec{r}(0, y, z)$.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

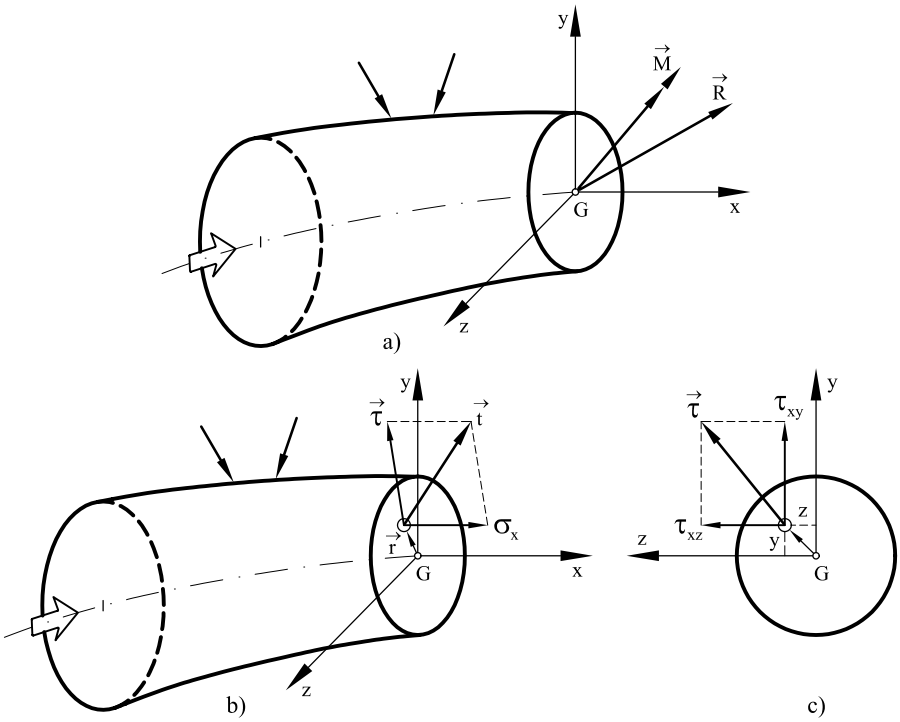

Fig. 2.8: Relación entre esfuerzos y tensiones

Las anteriores relaciones vectoriales se pueden descomponer en las correspondientes ecuaciones escalares. Así, la primera de las ecuaciones (2.7) se descompone en:

$$N = \int_S \sigma_x \, dS \quad ; \quad T_y = \int_S \tau_{xy} \, dS \quad ; \quad T_z = \int_S \tau_{xz} \, dS \tag{2.8}$$

Análogamente, la segunda de las ecuaciones (2.7) se descompone en:

$$M_t = \int_S (\tau_{xz}\, y - \tau_{xy}\, z) \, dS \quad ; \quad M_y = \int_S \sigma_x \, z \, dS \quad ; \quad M_z = -\int_S \sigma_x \, y \, dS \tag{2.9}$$

Estas ecuaciones muestran la relación entre los esfuerzos y las tensiones actuantes en una sección y serán empleadas a menudo en los Capítulos posteriores.

La Figura 2.9 muestra el convenio de signos utilizado para las componentes de tensión y de momento. Las tensiones sobre la sección son positivas si tienen el sentido de los correspondientes semiejes positivos. Los momentos son positivos si, adoptando el criterio de la mano derecha, el sentido de los vectores momento es positivo.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

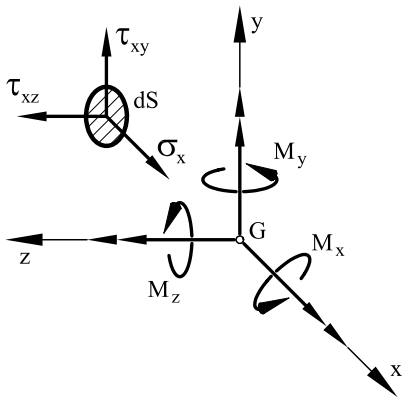

Fig. 2.9: Convenio de signos de tensiones y momentos

2.7 Esfuerzos en piezas de plano medio

Consideremos una pieza de plano medio tal como la que se muestra en la Figura 2.10. Llamaremos XY al plano medio que, recordemos, contiene a la directriz, es plano de simetría de las secciones rectas y contiene también a las cargas que actúan sobre la pieza.

El triedro de referencia xyz local de una sección genérica se define de la forma siguiente. El eje x es tangente a la directriz de la pieza en el centro de gravedad de

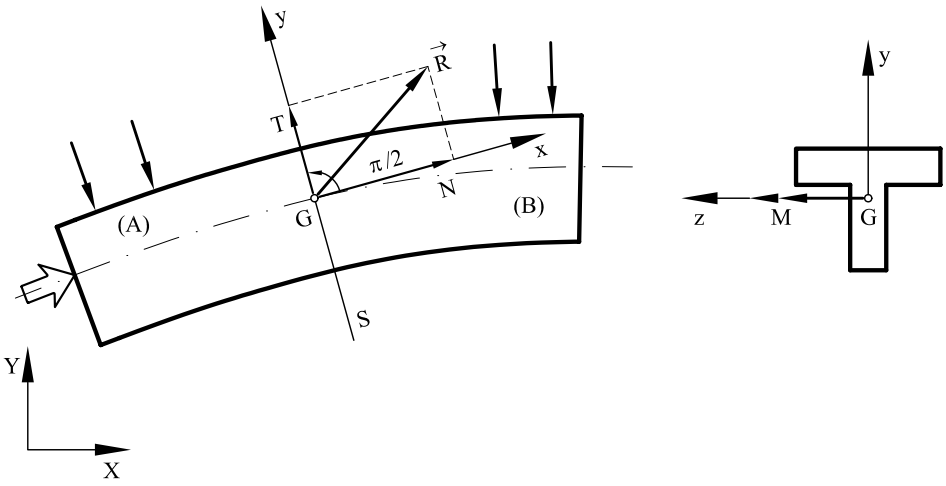

Fig. 2.10: Esfuerzos en piezas de plano medio

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

la sección G, y orientado según el sentido positivo de recorrido de la directriz. El eje y está también en el plano medio que, por simetría, es plano principal de inercia, y es normal al eje x, formando con éste un ángulo de $\pi/2$ radianes (antihorario). El eje z es normal a los ejes (x, y) y de sentido tal que el triedro (x, y, z) es dextrógiro. Así, el plano XY coincide con el plano xy, y el eje z es perpendicular a éste.

Al actuar las fuerzas exteriores sólo en el plano XY, la resultante $\vec{R}$ de las fuerzas que actúan a uno u otro lado de la sección está contenida en dicho plano, y se descompone en un esfuerzo axil N (según el eje x) y un esfuerzo cortante T (según el eje y). Por simetría respecto al plano medio, T_z es nulo. Por el mismo motivo, el momento resultante $\vec{M}$ de las fuerzas que actúan a uno u otro lado de la sección es perpendicular al plano XY y se llama momento flector M a su única componente según el eje z. Las otras dos componentes M_t y M_y son nulas por simetría respecto al plano medio.

Al referirnos a los esfuerzos en piezas de plano medio adoptaremos el siguiente convenio de signos, que se muestra en la Figura 2.11:

- El esfuerzo axil N es positivo si es de tracción (según el sentido positivo del eje x en la cara frontal) y negativo si es de compresión.

- El esfuerzo cortante T es positivo si hace girar la rebanada en sentido antihorario (según el sentido positivo del eje y en la cara frontal), y negativo en caso contrario.

- El momento flector M es positivo si es antihorario sobre la cara frontal (según el sentido positivo del eje z en la cara frontal), y negativo en caso contrario.

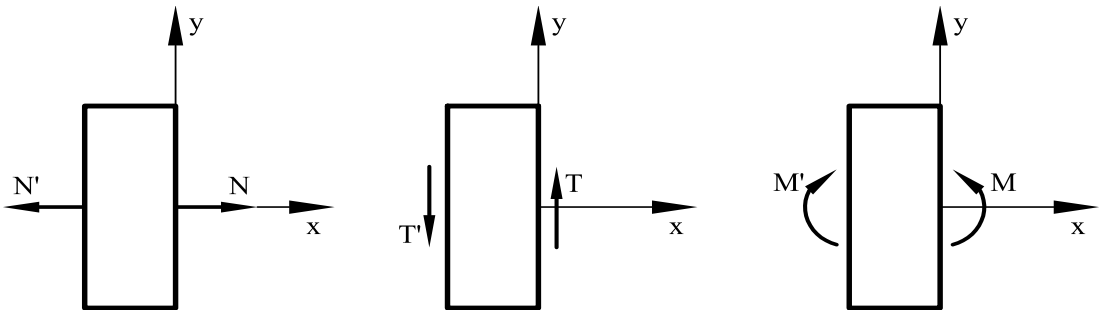

Fig. 2.11: Convenio de signos para esfuerzos en piezas de plano medio

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

2.8 Ecuaciones de equilibrio en piezas rectas

Consideremos el equilibrio de una rebanada diferencial de una pieza recta *de plano medio*, sobre la que actúan unas fuerzas repartidas por unidad de longitud, de componentes (p_x, p_y) según los ejes coordenados, aplicadas en la directriz de dicha rebanada. Tal como se muestra en la Figura 2.12, se tiene:

a) por equilibrio de fuerzas según el eje x:

$$-N + p_x\,dx + (N + dN) = 0 \qquad \Rightarrow \quad p_x = -\frac{dN}{dx} \tag{2.10}$$

b) por equilibrio de fuerzas según el eje y:

$$-T_y + p_y\,dx + (T_y + dT_y) = 0 \qquad \Rightarrow \quad p_y = -\frac{dT_y}{dx} \tag{2.11}$$

c) por equilibrio de momentos respecto al centro de gravedad de la cara frontal:

$$-M_z + T_y\,dx + (M_z + dM_z) - p_y\frac{dx^2}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \quad T_y = -\frac{dM_z}{dx} \tag{2.12}$$

donde se ha despreciado el término de segundo orden debido a las fuerzas repartidas.

Estas ecuaciones establecen relaciones diferenciales entre la ley de cargas y las leyes de esfuerzos de una viga recta de plano medio. En casos sencillos, estas relaciones pueden integrarse directamente para calcular las leyes de esfuerzos. En casos más complejos, estas relaciones sirven de ayuda para calcular o dibujar dichas leyes.

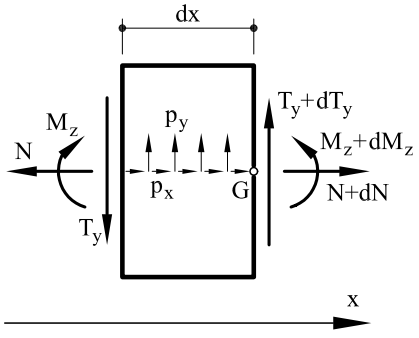

Fig. 2.12: Acciones sobre una rebanada de pieza recta

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

La generalización de las ecuaciones diferenciales de equilibrio de la rebanada para una viga de directriz recta general (no de plano medio), sometida a unas fuerzas repartidas por unidad de longitud de componentes $(p_x,\ p_y,\ p_z)$ según el triedro local de referencia se pueden obtener de forma análoga, y son:

$$\begin{aligned} p_x = -\frac{dN}{dx} \qquad p_y = -\frac{dT_y}{dx} \qquad p_z = -\frac{dT_z}{dx} \\ T_y = -\frac{dM_z}{dx} \qquad T_z = +\frac{dM_y}{dx} \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.9 Apoyos y enlaces en estructuras de plano medio

2.9.1 Apoyos

Se llama *apoyo* a todo dispositivo destinado a unir una estructura al medio de sustentación. Los apoyos cumplen la doble función de impedir o limitar los movimientos de las estructuras y de trasmitir las cargas que éstas soportan al medio de sustentación.

Se describen, a continuación, los tipos de apoyo más usuales en estructuras de plano medio. Dado que una sección de una pieza de plano medio tiene tres grados de libertad, dos traslaciones independientes en el plano medio y un giro perpendicular a éste, existen varios tipos de apoyo, según coarten uno, dos o los tres grados de libertad de la sección de apoyo. Por cada grado de libertad coartado, el apoyo trasmite a la estructura una *reacción* que impide el movimiento. Estas reacciones son, naturalmente, iguales y de sentidos opuestos a las fuerzas que la estructura trasmite al medio de sustentación.

(a) Apoyo simple o articulado móvil

Este tipo de apoyo sólo coarta el movimiento de la sección de apoyo en una dirección, permitiendo la traslación en la dirección perpendicular y el giro de la sección de apoyo (Figura 2.13). La reacción que produce es una fuerza perpendicular a la dirección de rodadura, o sea, al movimiento permitido. Asociada a un apoyo simple se introduce, por tanto, una sola incógnita, el módulo de la reacción, ya que su posición y dirección son conocidas.

(b) Apoyo fijo o articulación

Este tipo de apoyo impide totalmente el movimiento de traslación de la sección de apoyo, pero permite el giro (Figura 2.14). La reacción que produce es una fuerza de dirección y módulo desconocidos. Se introducen, pues, dos incógnitas: las componentes de la reacción respecto a dos ejes perpendiculares cualesquiera.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

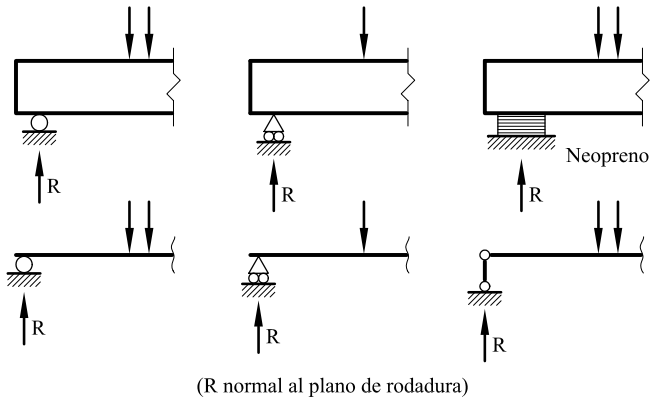

Fig. 2.13: Apoyo simple o móvil

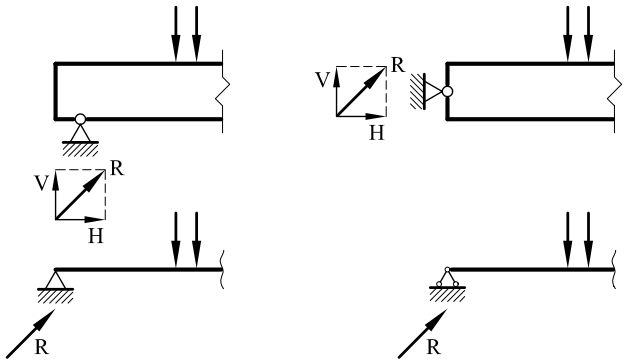

Fig. 2.14: Apoyo fijo o articulación

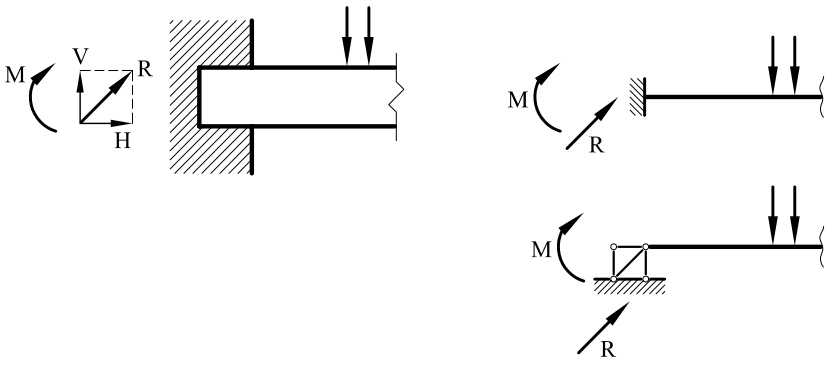

Fig. 2.15: Empotramiento

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

(c) Empotramiento

Este tipo de apoyo impide todo movimiento de la sección de apoyo, tanto de traslación como de giro (Figura 2.15). La reacción que se produce es una fuerza de posición, dirección y módulo desconocidos. Se introducen, pues, tres incógnitas: dos componentes de la reacción y el momento sobre la sección de apoyo.

2.9.2 Enlaces

Se llama *enlace* o *nudo* a todo dispositivo destinado a unir entre sí las diferentes piezas que forman una estructura. Los enlaces cumplen la doble función de impedir o limitar los movimientos *relativos* de unas piezas respecto a otras, y de trasmitir las cargas que unas soportan a las demás. Por cada grado de libertad coartado a la sección de enlace, éste trasmite a las piezas concurrentes una reacción interna. Estas reacciones son iguales y de sentidos opuestos en las dos piezas que se unen en la sección de enlace. Se describen, a continuación, los tipos de enlaces más usuales en estructuras de plano medio.

(a) Enlace deslizante

Este tipo de enlace sólo coarta el movimiento relativo en una dirección, permitiendo la traslación en la dirección perpendicular y el giro de la sección de enlace (Figura 2.16). La reacción que produce es un par de fuerzas, iguales y opuestas, perpendiculares al movimiento permitido. Se introduce, por tanto, una sola incógnita: el módulo de las reacciones.

(b) Articulación o nudo articulado

Este tipo de enlace impide totalmente la traslación relativa de la sección de enlace, pero permite el giro relativo de la misma (Figura 2.17). La reacción que produce es un par de fuerzas de dirección y módulo desconocidos. En una articulación interna se introducen, pues, dos incógnitas: las componentes de la reacción respecto a dos ejes perpendiculares cualesquiera. El momento flector es necesariamente nulo en una articulación.

(c) Empotramiento o nudo rígido

Este tipo de enlace impide todo movimiento de la sección de enlace, tanto de traslación como de giro (Figura 2.18). La reacción que produce es un par de fuerzas de posición, dirección y módulo desconocidos. En un nudo rígido se introducen, por tanto, tres incógnitas: dos componentes de la reacción y el momento de la sección de enlace.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

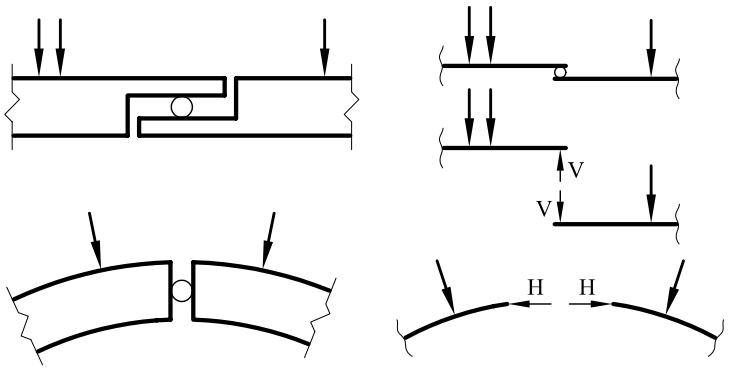

Fig. 2.16: Enlace deslizante

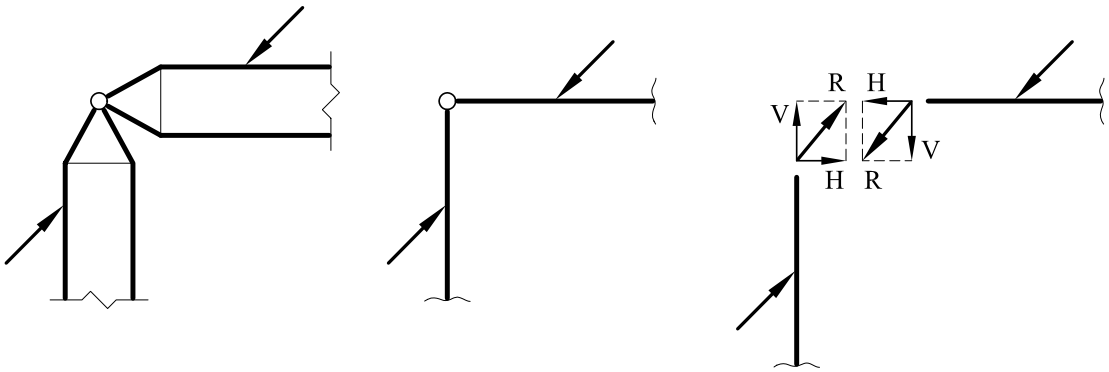

Fig. 2.17: Articulación interna o nudo articulado

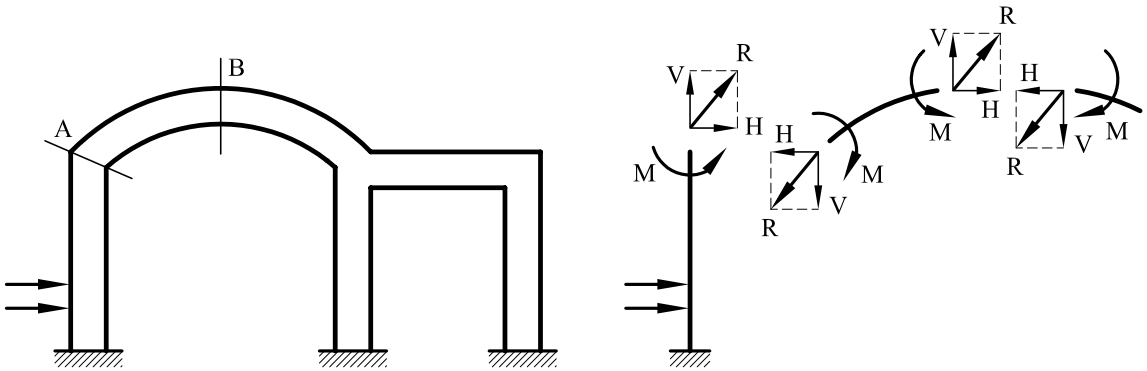

Fig. 2.18: Empotramiento o nudo rígido

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Los apoyos y enlaces considerados para estructuras de plano medio pueden fácilmente generalizarse para estructuras espaciales. En este caso, el número de grados de libertad de la sección es seis (tres traslaciones y tres rotaciones), y por tanto, el número de tipos de apoyos y enlaces posibles es mucho mayor.

2.10 Estructuras isostáticas e hiperestáticas

Las fuerzas (acciones y reacciones) que actúan sobre una estructura deben estar en equilibrio estático. Esto significa que deben formar un sistema de fuerzas de resultante nula y de momento resultante nulo; por tanto, deben cumplir las ecuaciones que se conocen con el nombre de *ecuaciones de la estática,* que, en forma vectorial, pueden escribirse como:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \tag{2.14a}$$

$$\sum_i \vec{M}_i^o = 0 \tag{2.14b}$$

donde $\vec{F}_i$ representa a cada una de las fuerzas que actúan sobre la estructura, $\vec{M}_i^o$ representa el momento de cada una de las fuerzas respecto de un punto arbitrario O y el símbolo $\sum_i$ representa la suma sobre todas las fuerzas i.

En el caso de estructuras planas cargadas en su plano, las anteriores ecuaciones vectoriales se reducen a tres ecuaciones escalares de la forma:

$$\sum_i (F_x)_i = 0 \quad ; \quad \sum_i (F_y)_i = 0 \quad ; \quad \sum_i (M_z)_i^o = 0 \tag{2.15}$$

donde los ejes x e y están sobre el plano de la estructura y el eje z es perpendicular a éstos.

Pero la condición de equilibrio estático, y las correspondientes ecuaciones que lo expresan matemáticamente no son sólo aplicables a la estructura considerada en su conjunto, sino que debe satisfacerse también para cada parte integrante de ella, siempre que se consideren de forma explícita las fuerzas y momentos que el resto de la estructura ejerce sobre la parte considerada. En particular, las piezas que forman una estructura de barras deben estar en equilibrio, siempre que se consideren las fuerzas y momentos de extremo de barra que la estructura ejerce sobre las piezas. Análogamente, los nudos de la estructura deben estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas y momentos que actúan en los extremos de las barras que concurren en ellos.

En Mecánica de Estructuras se llama *resolver* una estructura a calcular el valor de los esfuerzos que actúan sobre cada una de las secciones de todas las piezas que componen la estructura. Cuando este cálculo puede realizarse íntegramente utilizando sólo las

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

ecuaciones de la estática, la estructura se llama *isostática* o *estáticamente determinada.* En caso contrario, se le llama *hiperestática* o *estáticamente indeterminada.*

En la Figura 2.19 se muestran dos ejemplos de estructuras isóstáticas. En ambos casos, las incógnitas que implican las reacciones exteriores y los esfuerzos que actúan sobre una sección cualquiera de la estructura pueden hallarse utilizando sólo las ecuaciones (2.15). Por el contrario, en la Figura 2.20 se muestran dos ejemplos de estructuras hiperestáticas. En ambos casos, las incógnitas que implican las reacciones exteriores no pueden determinarse utilizando sólo las ecuaciones (2.15), ya que su número es superior que el de ecuaciones.

Las estructuras formadas por varias piezas pueden ser estáticamente indeterminadas, a pesar de que la totalidad de las reacciones exteriores puedan determinarse por consideraciones de equilibrio. Es decir, que aunque se conozcan las reacciones exteriores es imposible determinar los esfuerzos en todas las secciones. A estas estructuras se les llama *internamente hiperestáticas* y para poder resolverlas hay que suprimir enlaces internos y sustituirlos por sus reacciones internas equivalentes.

Así, en la Figura 2.21a se muestran dos ejemplos de estructuras que, si bien son externamente isostáticas, son, sin embargo, internamente hiperestáticas. Las dos estructuras de la Figura 2.21b son hiperestáticas tanto externa como internamente.

Es, por tanto, necesario definir el grado de hiperestatismo de una estructura con independencia de si el origen de éste es la indeterminación de las reacciones en los apoyos o en los enlaces internos. De una forma general, se define el *grado de hiperestatismo* de una estructura como la diferencia:

$$h = n - p\,e \tag{2.16}$$

donde n es el número de reacciones (externas o internas) que hay que conocer para poder determinar los esfuerzos actuantes en cualquier sección de la estructura, e es el número de ecuaciones de la estática y p es el número de partes en que queda dividida la estructura al hacer los cortes necesarios para poder determinar los esfuerzos. Obviamente, cada una de las partes resultantes al dividir la estructura debe ser isostática, y debe, por tanto, satisfacer independientemente las ecuaciones de equilibrio estático.

Una vez calculado el valor h, para

$h = 0$ la estructura es isotática,
$h > 0$ la estructura es hiperestática de grado h,
$h < 0$ la estructura es un mecanismo de grado h.

En el Capítulo 1 del Libro 2 de esta obra se trata de nuevo el tema de la determinación del grado de hiperestatismo de las estructuras y se presentan algunos ejemplos ilustrativos.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

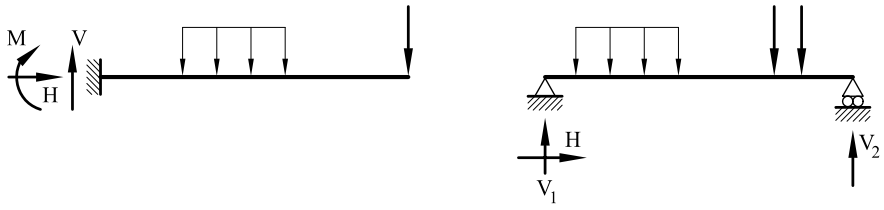

Fig. 2.19: Estructuras isostáticas

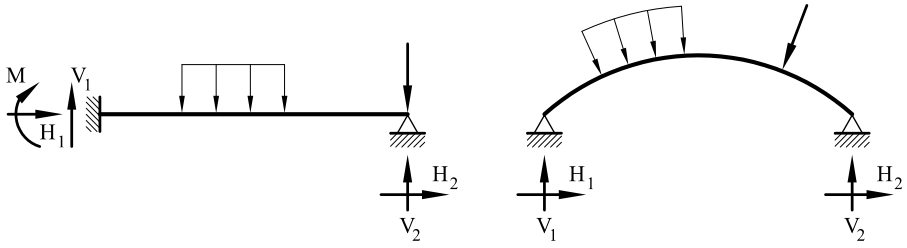

Fig. 2.20: Estructuras hiperestáticas

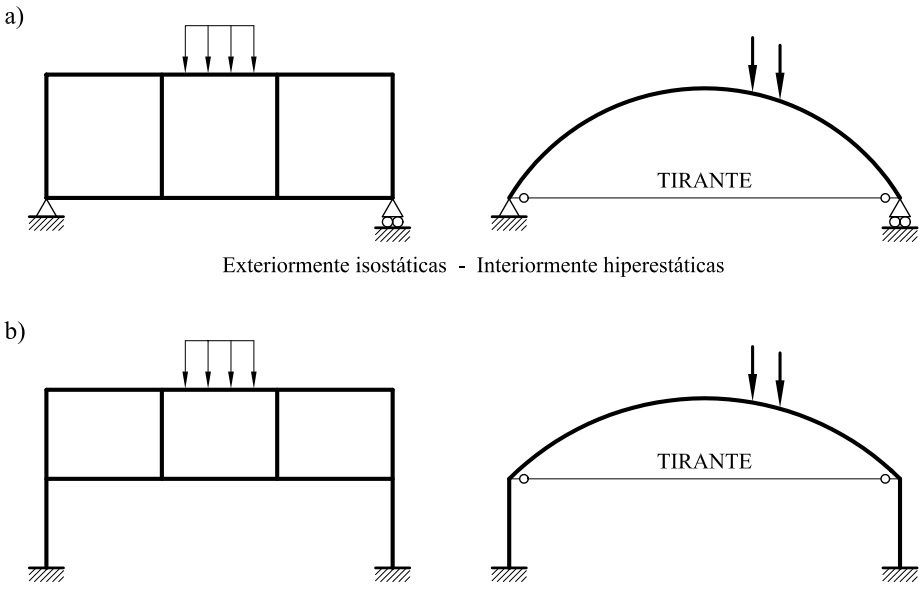

Fig. 2.21: Concepto de hiperestatismo interno

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

2.11 Leyes de esfuerzos

En las estructuras isotáticas es posible calcular la fuerza y momento resultantes, $\vec{R}$ y $\vec{M}$, sobre una sección S cualquiera de la estructura utilizando únicamente las ecuaciones de equilibrio estático. De acuerdo con lo expuesto en la Sección 2.5, se definen los *esfuerzos* sobre la sección como las proyecciones de estas resultantes sobre un triedro cartesiano dextrógiro xyz, con origen en el centro de gravedad G de la sección S, en el que el eje x es normal a la sección S y tangente a la directriz de la viga, y los ejes (y, z) son los ejes principales de inercia de la sección S.

Así, proyectando la fuerza resultante $\vec{R}$ sobre los ejes (x, y, z), se definen el esfuerzo axil N, el esfuerzo cortante T_y y el esfuerzo cortante T_z, respectivamente. Análogamente, proyectando el momento resultante $\vec{M}$ sobre los ejes (x, y, z), se definen el momento torsor M_t, el momento flector M_y y el momento flector M_z, respectivamente.

Si la pieza primática es de plano medio, se pueden tomar los ejes locales de referencia (x, y, z) en todas las secciones de tal manera que el plano medio de la pieza contenga a los ejes x e y, ya que es un plano de simetría de éstas. En estas condiciones, las componentes de $\vec{R}$ y $\vec{M}$ se reducen al esfuerzo axil N, el esfuerzo cortante T_y y el momento flector M_z, exclusivamente.

Se llama *leyes de esfuerzos* o *diagramas de esfuerzos* a la representación gráfica de la variación de dichos esfuerzos a lo largo de las piezas de la estructura. Esta representación permite determinar, para cada pieza, las secciones de ésta en las que los esfuerzos alcanzan sus valores máximos. Esta es una información imprescindible para el dimensionamiento de las piezas o, una vez dimensionadas, para la comprobación *a posteriori* de que se cumplen los criterios de resistencia.

En una estructura isostática la determinación de las leyes de esfuerzos sigue los pasos siguientes:

1. determinación de las reacciones exteriores,
2. determinación de la variación de los diferentes esfuerzos en cada pieza,
3. determinación de los valores máximos de los esfuerzos, a nivel de pieza y estructura.

Las relaciones diferenciales entre las leyes de cargas aplicadas y los esfuerzos obtenidos en la Sección 2.8 son de gran utilidad a la hora de definir la forma que tienen las leyes de esfuerzos en cada barra.

A continuación, se desarrollan algunos ejemplos para piezas rectas y estructuras de plano medio. Se mantendrá la convención de signos adoptada al definir el equilibrio de la rebanada de la pieza prismática recta (Sección 2.8).

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ejemplo 2.10.1

Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos de la viga ABC de la Figura 2.22 sometida a la acción de la carga p uniformemente repartida en el tramo BC.

Cálculo de las reacciones

Teniendo en cuenta las condiciones de equilibrio de la estática (suma de fuerzas verticales igual cero y suma de momentos respecto al apoyo A igual a cero, respectivamente), puede escribirse:

$$V_A + V_C = p\,\frac{l}{2} \qquad ; \qquad V_C\,l = p\,\frac{l}{2}\,\frac{3l}{4}$$

Por tanto, las reacciones en los apoyos A y C son :

$$V_A = \frac{1}{8}\,pl \qquad ; \qquad V_C = \frac{3}{8}\,pl$$

Ley de momentos flectores

La ley de momentos flectores se obtiene calculando, para una sección dada, el momento resultante en la sección de las fuerzas aplicadas a un lado de la misma. En el tramo AB, para una sección a una distancia x del apoyo A, y calculando dorsalmente, se tiene:

$$M(x) \;= V_A\;x = \frac{1}{8}\,p\,l\,x$$

o sea, una ley lineal a lo largo del tramo AB, con un máximo en la sección $x = l/2$, de valor $M_B = pl^2/16$. En el tramo BC, para una sección a una distancia x del apoyo A, y calculando dorsalmente, puede escribirse:

$$M(x) \;= V_A\;x - \frac{p}{2}\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{pl}{8}\left[-\frac{4x^2}{l} + 5x - l\right]$$

En este caso, la ley de variación del momento flector es parabólica y la distancia a la que se produce el valor máximo se obtiene derivando respecto a la variable x e igualando a cero:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{pl}{8}\left[-\frac{8x}{l} + 5\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \;=\; \frac{5l}{8}$$

y se tiene:

$$M_{\max} = M(x = \;\frac{5l}{8}) \;= \frac{9}{128}\,pl^2$$

Obsérvese que la ley de flectores es continua en el punto B, y también lo es su derivada.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

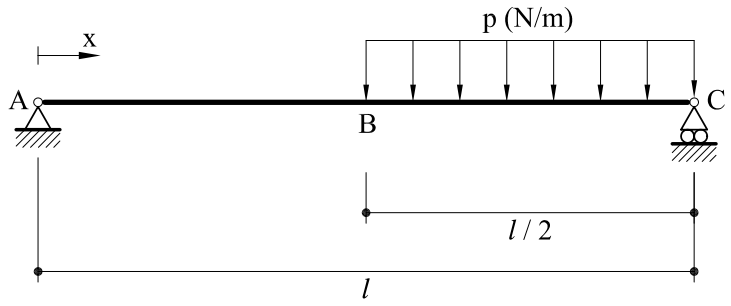

Fig. 2.22: Estructura del Ejemplo 2.10.1

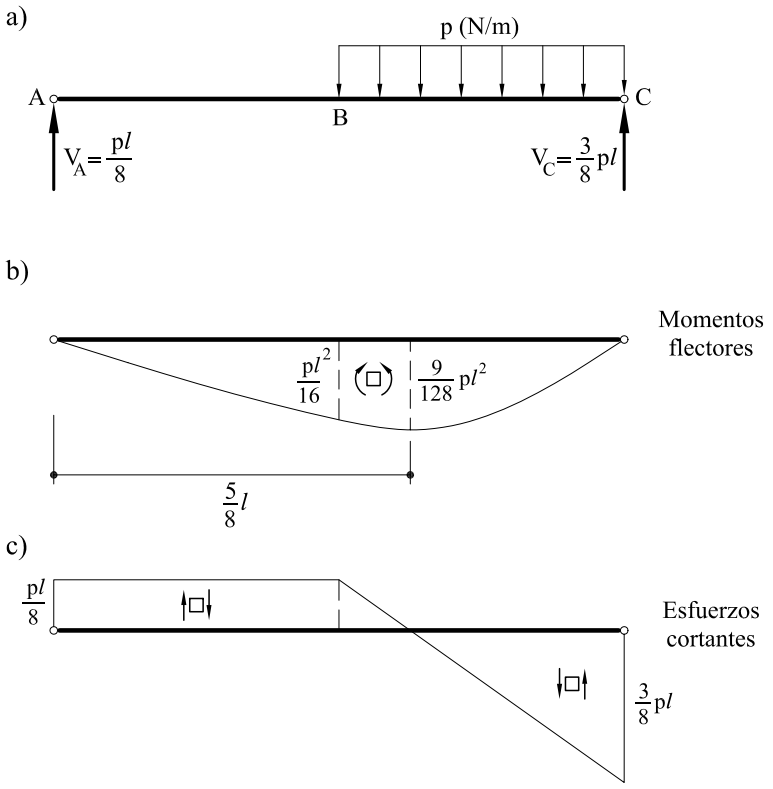

Fig. 2.23: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.1

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ley de esfuerzos cortantes

Calculemos la resultante $\vec{R}$ en una sección cualquiera de la viga sumando las fuerzas aplicadas a un lado de la sección. En este caso la resultante tiene como única componente el esfuerzo cortante T_y y, por lo tanto, los axiles son nulos en toda la pieza.

En el tramo AB, calculando dorsalmente, se tiene que la ley de variación es constante de valor igual a la reacción V_A. En el tramo BC, en una sección situada a una distancia x del apoyo A, y calculando dorsalmente, la proyección de $\vec{R}$ sobre la sección es igual a la suma de la reacción V_A más la resultante de la carga repartida comprendida entre la sección B y la sección considerada; por tanto, la ley de esfuerzo cortante es lineal. Se tiene:

$$\begin{aligned} &\text{Tramo } AB \quad : \qquad T_y = V_A \qquad\qquad\quad = -\frac{1}{8}\,pl \\ &\text{Tramo } BC \quad : \qquad T_y = V_A + p\left(x - \frac{l}{2}\right) = -\frac{5}{8}\,pl + px \end{aligned}$$

En las Figuras 2.23a, b y c se representan las reacciones, diagramas de momentos flectores y de esfuerzos cortantes, respectivamente. Se observa que a una variación constante del cortante le corresponde una variación lineal del flector, y que a una variación lineal del cortante le corresponde una variación parabólica del flector.

Ejemplo 2.10.2

La viga $ABCDE$ de la Figura 2.24 está sometida a una carga puntual P de 200 kN en la sección B y a una carga uniformemente repartida p de 20 kN/m en el tramo CE. Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

Cálculo de reacciones

Aplicando las condiciones de equilibrio (suma nula de fuerzas verticales, suma nula de momentos respecto al punto A y momento flector nulo en las rótulas B y D), y trabajando en kN y m, pueden escribirse las siguientes ecuaciones (ver Figura 2.25):

$$\begin{aligned} V_A + V_C + V_E &= 400 \\ M_A + 10V_C + 20V_E &= 4.000 \\ M_A - 5V_A &= 0 \\ 5V_E - 250 &= 0 \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Resolviendo estas ecuaciones, se obtienen los valores de las reacciones en el empotramiento A y en los apoyos C y E:

$$\begin{array}{rclcrcl} V_A & = & 100 \text{ kN} & ; & V_C & = & 250 \text{ kN} \\ M_A & = & 500 \text{ kN} \cdot \text{m} & ; & V_E & = & 50 \text{ kN} \end{array}$$

Ley de momentos flectores

En el tramo AB, cortando la estructura a una distancia x del apoyo A y calculando el momento flector dorsalmente se obtiene:

$$M(x) = -M_A + V_A \; x = -500 + 100x$$

que es una ley lineal. Para $x = 5$ m se tiene $M_B = 0$, como corresponde a una rótula. En el tramo BC se tiene:

$$M(x) = -M_A + V_A \; x - 200(x - 5) = 500 - 100x$$

que es también una ley lineal. Para $x = 10$ m se tiene el momento en el apoyo C, $M_C = -500$ kN·m. En el tramo CE, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} M(x) & = & 500 - 100x + V_C \; (x - 10) - \dfrac{p}{2}(x - 10)^2 \\ & = & -3.000 + 350x - 10x^2 \end{array}$$

que es una ley parabólica, con su valor máximo situado a una distancia $x_{\max}$ del apoyo A que puede determinarse igualando a cero la derivada de la ley de momentos respecto a la variable x. En este caso, $x_{\max} = 17,5$ m y el valor del momento correspondiente es $M_{\max}(x = x_{\max}) = 62,5$ kN·m.

Ley de esfuerzos cortantes

Calculando la resultante de las fuerzas situadas a un lado de la sección y determinando la componente paralela a la misma se obtiene la variación del esfuerzo cortante en cada tramo de la estructura. En el tramo AB, y calculando dorsalmente, dicha resultante es constante e igual a V_A:

$$T_y = V_A = -100 \text{ kN}$$

En el tramo BC, la resultante de las fuerzas a un lado de la sección es también un valor constante, igual a la suma de la reacción V_A más la fuerza aplicada en B:

$$T_y = V_A + 200 = 100 \text{ kN}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

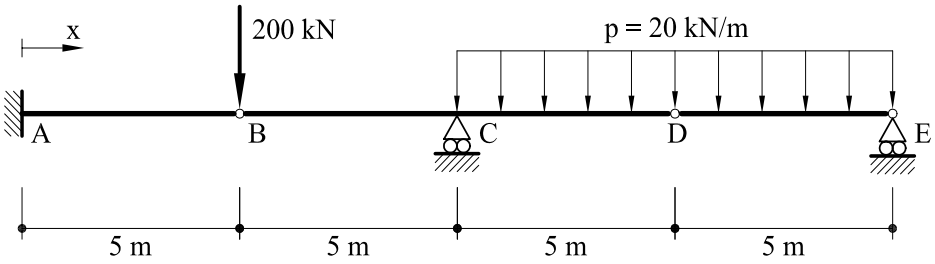

Fig. 2.24: Estructura del Ejemplo 2.10.2

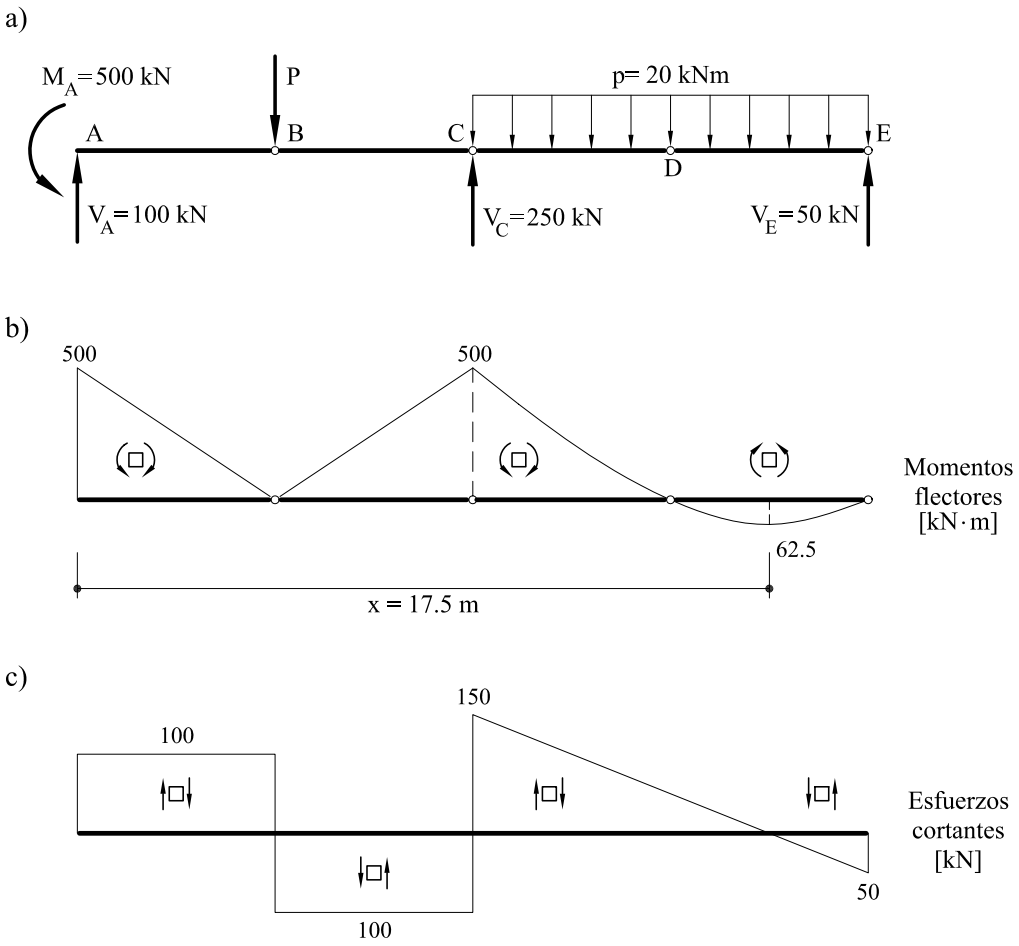

Fig. 2.25: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.2

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Por último, en el tramo CE y siguiendo el mismo procedimiento se obtiene:

$$T_y = 100 - 250 + 20(x - 10) = -350 + 20x$$

que es una ley lineal. Nótese que en cada tramo la ley de esfuerzos cortantes coincide con la derivada de la ley de momentos flectores respecto a la variable x (cambiada de signo), tal como exige el equilibrio de la rebanada.

En las Figuras 2.25a, b y c se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la viga ABC.

Ejemplo 2.10.3

La estructura $ABCD$ de la Figura 2.26 está empotrada en la sección A y sometida a una carga vertical p de 30 kN/m, uniformemente repartida sobre el eje de la viga CBD, inclinada un ángulo α respecto a la horizontal. Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

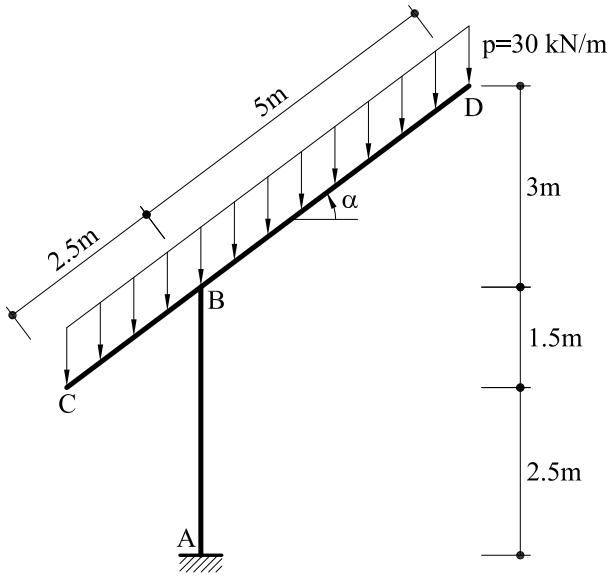

Fig. 2.26: Estructura del Ejemplo 2.10.3

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Cálculo de reacciones

Partiendo de las ecuaciones de equilibrio se calculan en primer lugar las reacciones externas. Imponiendo que la suma de fuerzas verticales y la suma de momentos en el empotramiento A sean cero, se tiene (ver Figura 2.27a):

$$\begin{aligned} R_A &= 30 \cdot 7,5 &&= 225 \text{ kN} \\ M_A &= 225 \cdot (5 - 3,75) \cos\alpha &&= 225 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

donde α es el ángulo de inclinación de las barras BC y BD.

Ley de momentos flectores

Calculando dorsalmente se tiene que la ley de momentos flectores en el pilar AB es constante y de valor $M_A = 225$ kN·m. En la viga CB, para una sección a una distancia s del extremo C (ver Figura 2.27b), se tiene:

$$M(x) = -30\, s\, \frac{x}{2} = -15\; s\; x = -15\; \frac{x^2}{\cos\alpha}$$

La ley de flectores es parabólica y para $x = 2$ m se obtiene $M_B = -75$ kN·m, valor del momento flector en la sección B del tramo CB. Análogamente, en la viga BD, para una sección a una distancia s_1 del extremo D (ver Figura 2.27b) se obtiene:

$$M(x_1) = -30\; s_1\; \frac{x_1}{2} = -15\; s_1\; x_1 = -15\, \frac{x_1^2}{\cos\alpha}$$

ley parabólica que para $x_1 = 4$ m toma el valor del momento flector en la sección B del tramo BD, $M_B = -300$ kN·m.

Ley de esfuerzos cortantes

Calculando dorsalmente se tiene que la ley de esfuerzo cortante en el pilar AB es cero. Nótese que la ley de momentos flectores en el pilar AB es constante y, en consecuencia, su derivada primera es nula.

En los tramos CB y BD se tiene, proyectando la resultante de fuerzas sobre el plano de la sección:

$$\begin{aligned} T_{CB} &= 30\; s \cos\alpha &&= 30\, x \\ T_{BD} &= (30\; s - 225) \cos\alpha &&= 30\, x - 225 \cos\alpha \end{aligned}$$

Ambas leyes son lineales, como corresponde a una variación parabólica del flector.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

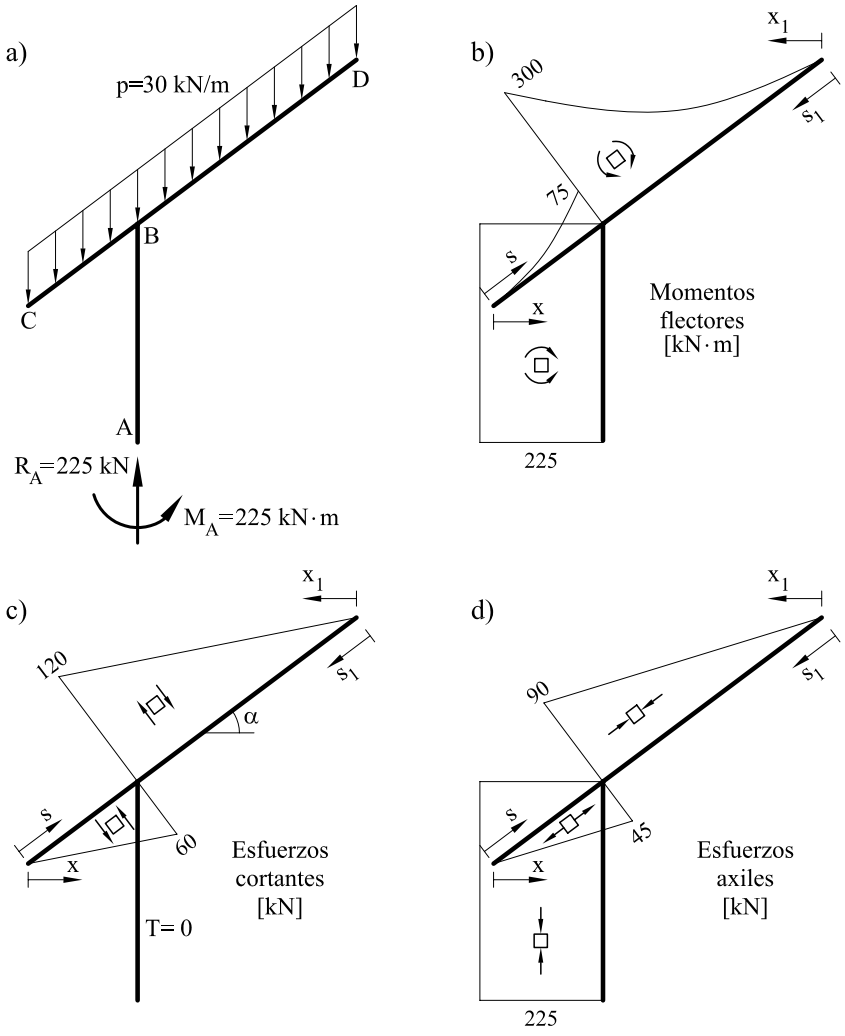

Fig. 2.27: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.3

Ley de esfuerzos axiles

Calculando dorsalmente se tiene que la ley de esfuerzo axil en el pilar AB es de compresión, constante y de valor $N = 225$ kN.

En los tramos CB y BD la ley de axiles se obtiene proyectando la resultante de fuerzas sobre la normal al plano de la sección. Se tiene:

$$\begin{aligned} N_{CB} &= 30\ s \sin\alpha \\ N_{BD} &= (30\ s - 225) \sin\alpha \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ambas leyes son lineales, como corresponde a una carga uniforme. Obsérvese que, sobre cada sección, la composición vectorial de los correspondientes esfuerzos cortante y axil es igual a la resultante de fuerzas $\overrightarrow{R}$ sobre la sección, que es una fuerza vertical.

En las Figura 2.27 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

Ejemplo 2.10.4

El pórtico de la Figura 2.28 está sometido a una carga p de 20 kN/m, uniformemente distribuida según la proyección horizontal del dintel BC, y a dos fuerzas concentradas horizontales de 30 kN que actúan en las secciones E y F (estas fuerzas puntuales representan un cable postesado anclado en las nudos E y F). Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

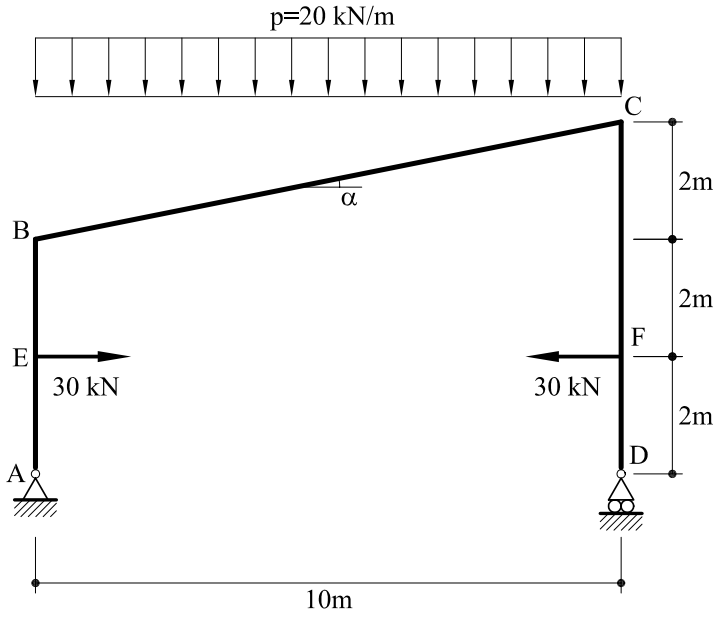

Fig. 2.28: Estructura del Ejemplo 2.10.4

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Cálculo de reacciones

Se calculan en primer lugar las reacciones en los apoyos utilizando las condiciones de equilibrio. Se obtiene que la reacción horizontal H_A es nula y:

$$\begin{aligned} V_A + V_D &= 200 \\ 10V_D &= 20 \cdot 10 \cdot 5 \end{aligned}$$

y, por lo tanto:

$$V_A = 100 \text{ kN} \qquad ; \qquad V_D = 100 \text{ kN}$$

Ley de momentos flectores

En los tramos AE y DF de ambos pilares la ley de momentos flectores es nula. Continuando con el pilar AB, a partir de la sección E, y calculando dorsalmente, se obtiene:

$$M(s) = -30\,s$$

siendo s la distancia desde E. Es una ley de variación lineal que para $s = 2$ m proporciona el valor del momento flector en la sección B, $M_B = -60$ kN·m.

Análogamente, en el pilar DC se obtiene:

$$M(s_1) = -30\,s_1$$

siendo s_1 la distancia desde F. Es una ley de variación lineal que en la sección C ($s_1 = 4\,m$) toma el valor $M_C = -120$ kN·m.

En el dintel BC, para una sección a una distancia x de la sección B, se tiene

$$M(x) = V_A\,x - 30\left(2 + \frac{2}{10}\,x\right) - 20\,\frac{x^2}{2} = -60 + 94\,x - 10x^2$$

que es una ley parabólica, con su valor máximo situado a una distancia $x_{\max}$ de la sección B, que puede determinarse igualando a cero la derivada de la ley de momentos respecto a la variable x. En este caso, $x_{\max} = 4,7$ m y el valor del momento correspondiente es $M_{\max}(x = x_{\max}) = 160,9$ kN·m.

Ley de esfuerzos cortantes

El esfuerzo cortante en el primer tramo AE del pilar AB es nulo. A partir de la sección E el valor del esfuerzo cortante coincide con la fuerza horizontal aplicada en dicha sección. Por tanto, la ley es constante y de valor:

$$T_{EB} = 30 \text{ kN}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

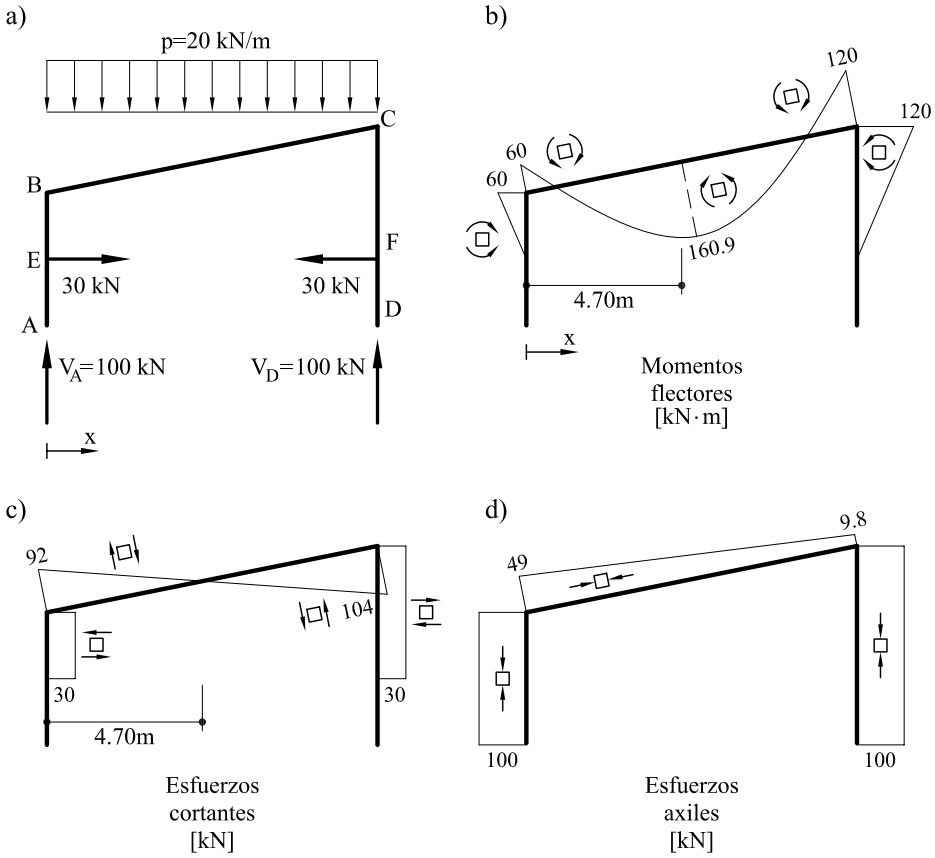

Fig. 2.29: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.4

Análogamente, en el pilar DC se tiene un valor de cortante nulo hasta la sección F. En el tramo de pilar FC la ley de esfuerzo cortante es constante, de valor coincidente con el valor de la fuerza horizontal aplicada en F:

$$T_{FC} = 30 \text{ kN}$$

En el tramo BC, inclinado un ángulo α respecto a la horizontal, para una sección situada a una distancia x del extremo B la proyección de la resultante de las fuerzas sobre el plano de la sección es igual a:

$$T_{BC} = (-V_A + 20\, x)\cos\alpha + 30 \sin\alpha$$

que es una ley lineal, de valor $T_B = -92,17$ kN para la sección B ($x = 0$). Nótese que para $x = 4,7$ m el valor del esfuerzo cortante es cero, como corresponde a la sección de máximo momento en el tramo BC.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ley de esfuerzos axiles

En los pilares AB y CD los axiles son de compresión, constantes y de valor igual a las reacciones verticales en los respectivos apoyos. Por tanto,

$$N_{AB} = N_{CD} = 100\,\text{kN}$$

En el tramo BC, calculando dorsalmente, se tiene

$$N_{BC} = (-100 + 20\,x)\,\sin\alpha - 30\cos\alpha$$

que es una ley lineal, con los valores extremos $N_B = -49$ kN y $N_C = -9,8$ kN para las secciones B y C, respectivamente.

En las Figura 2.29 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

Ejemplo 2.10.5

Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos para la estructura de la Figura 2.30, sometida a una fuerza horizontal F actuando en la sección D.

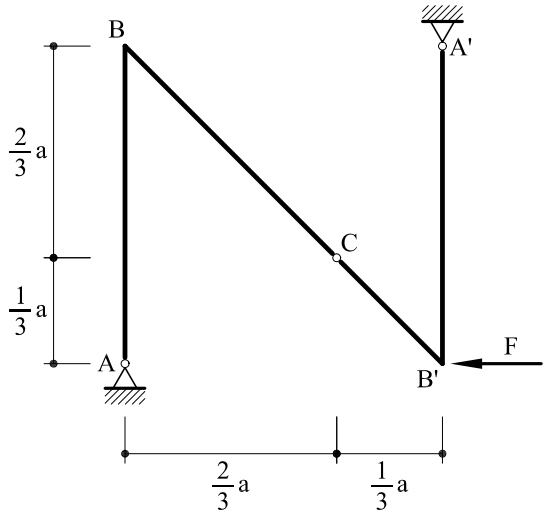

Fig. 2.30: Estructura del Ejemplo 2.10.5

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Cálculo de reacciones

Se calculan en primer lugar las reacciones en los apoyos utilizando las condiciones de equilibrio de fuerzas y momentos (en A) y la condición de momento flector nulo en la rótula C (calculado dorsalmente). Se tiene (ver Figura 2.31a):

$$\begin{aligned} H_A - H_{A'} - F &= 0 \\ V_A - V_{A'} &= 0 \\ H_{A'}\, a - V_{A'}\, a &= 0 \\ V_A \frac{2a}{3} - H_A \frac{a}{3} &= 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$V_A = V_{A'} = F \quad ; \quad H_A = 2F \quad ; \quad H_{A'} = F$$

Ley de momentos flectores

En el pilar AB, para una sección situada a una distancia y del apoyo A, se tiene

$$M_{AB} = -H_A\, y = -2Fy$$

ley de momento flector lineal, que para $y = a$, proporciona el valor del momento flector en la sección B, $M_B = -2Fa$. En el pilar $B'A'$, para una sección situada a una distancia $(a - y)$ de la sección A' se tiene

$$M_{B'A'} = H_{A'}\,(a - y) = F(a - y)$$

ley de momentos lineal con valor máximo $M_{B'} = Fa$. En el tramo BB', para una sección situada a una distancia x, y del apoyo A, puede escribirse

$$M_{BB'} = -H_A\, y + V_A\, x = F(x - 2y)$$

ley de momento flector lineal, con valores extremos $M_B = -2Fa$ y $M_{B'} = Fa$.

Ley de esfuerzos cortantes

Al ser lineales las leyes de flectores en todas las barras, los cortantes son uniformes en cada una de ellas. En los pilares se tiene

$$\begin{aligned} T_{AB} &= H_{A'} = 2F \\ T_{B'A'} &= H_{A'} = F \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

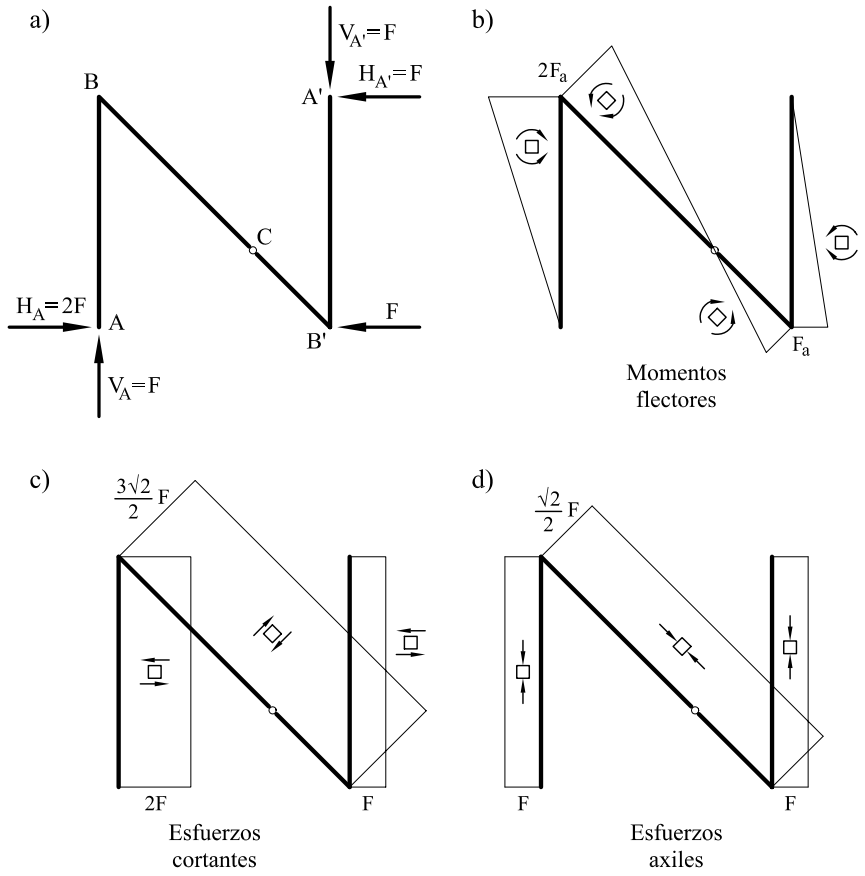

Fig. 2.31: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.5

valores coincidentes con las reacciones horizontales. En la barra BB' se tiene

$$T_{BB'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(V_A + H_A) = \frac{3\sqrt{2}}{2}F$$

Ley de esfuerzos axiles

Procediendo de manera similar al apartado anterior, se halla la componente de R normal a las secciones, y se obtienen los valores del esfuerzo axil, constantes en cada pieza.:

$$N_{AB} = -F \quad ; \quad N_{BB'} = -\frac{\sqrt{2}}{2}F \quad ; \quad N_{B'A'} = -F$$

En las Figura 2.31 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ejemplo 2.10.6

El pórtico isostático de la Figura 2.32 está sometido a una carga p de 20 kN/m, uniformemente distribuida en el dintel BD. Calcular y dibujar las leyes de esfuerzos.

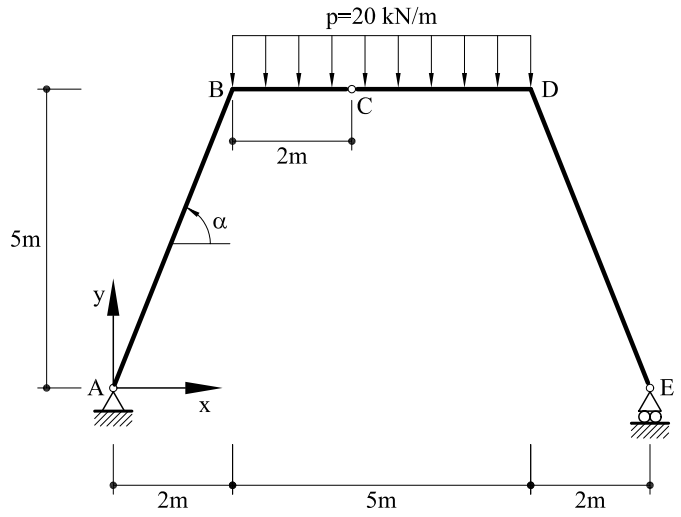

Fig. 2.32: Estructura del Ejemplo 2.10.6

Cálculo de reacciones

Se calculan en primer lugar las reacciones en los apoyos utilizando las ecuaciones de equilibrio y la condición de que el momento flector en la rótula sea nulo. Se tiene (ver Figura 2.33a):

$$\begin{aligned} H_A - H_E &= 0 \\ V_A + V_E &= 20 \cdot 5 \\ 9V_A &= 20 \cdot 5 \cdot 4,5 \\ 4V_A - 5H_A &= 20 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

y, por tanto, las reacciones son:

$$V_A = V_E = 50 \text{ kN} \quad ; \quad H_A = H_E = 32 \text{ kN}$$

Obsérvese que las reacciones son simétricas, a pesar de la posición asimétrica de la rótula.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ley de momentos flectores

En una sección genérica del tramo AB, utilizando los ejes de referencia (x, y) de la Figura 2.32 y calculando de forma dorsal, se tiene:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= V_A\, x - H_A\, y \\ &= 50\, x - 32\, y \end{aligned}$$

ley lineal con valor máximo $M_B = -60$ kN·m. En el tramo DE, procediendo ahora frontalmente, se obtiene también una ley lineal, simétrica respecto al eje vertical que pasa por el centro del dintel:

$$\begin{aligned} M_{DE} &= V_E\, (9 - x) - H_E\, y \\ &= 50\, (9 - x) - 32\, y \end{aligned}$$

En el dintel BD, trabajando dorsalmente, se puede escribir:

$$\begin{aligned} M_{BD} &= V_A\, x - H_A\, y - \frac{p}{2}(x-2)^2 \\ &= 50\, x - 32 \cdot 5 - \frac{20}{2}(x-2)^2 = -10\, x^2 + 90\, x - 200 \end{aligned}$$

que es una ley parabólica que se anula en la rótula y tiene valores máximos en los extremos $M_B = M_D = -60$ kN·m. El valor del flector en el centro es de $2,5$ kN·m.

Obsérvese que, dada la simetría de las cargas y reacciones, los flectores en la estructura son simétricos respecto al eje vertical central.

Ley de esfuerzos cortantes

En los pilares AB y DE los cortantes son constantes, ya que la ley de flectores en ellos es lineal. Su valor se obtiene proyectando sobre la sección las componentes de la reacción en A y E, respectivamente:

$$\begin{aligned} T_{AB} &= -V_A \cos\alpha + H_A \sin\,\alpha \;=\; 11 \text{ kN} \\ T_{DE} &= -V_E \cos\alpha + H_E \sin\,\alpha \;=\; 11 \text{ kN} \end{aligned}$$

donde α es el ángulo de inclinación de los soportes. En el tramo BD, calculando dorsalmente, se tiene

$$\begin{aligned} T_{BD} &= -V_A + p\;(x-2) \\ &= -50 + 20\;(x-2) \end{aligned}$$

que es una ley lineal con valores extremos $T_B = -V_A$ y $T_D = V_E$, y de valor nulo en el centro del dintel, por simetría.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

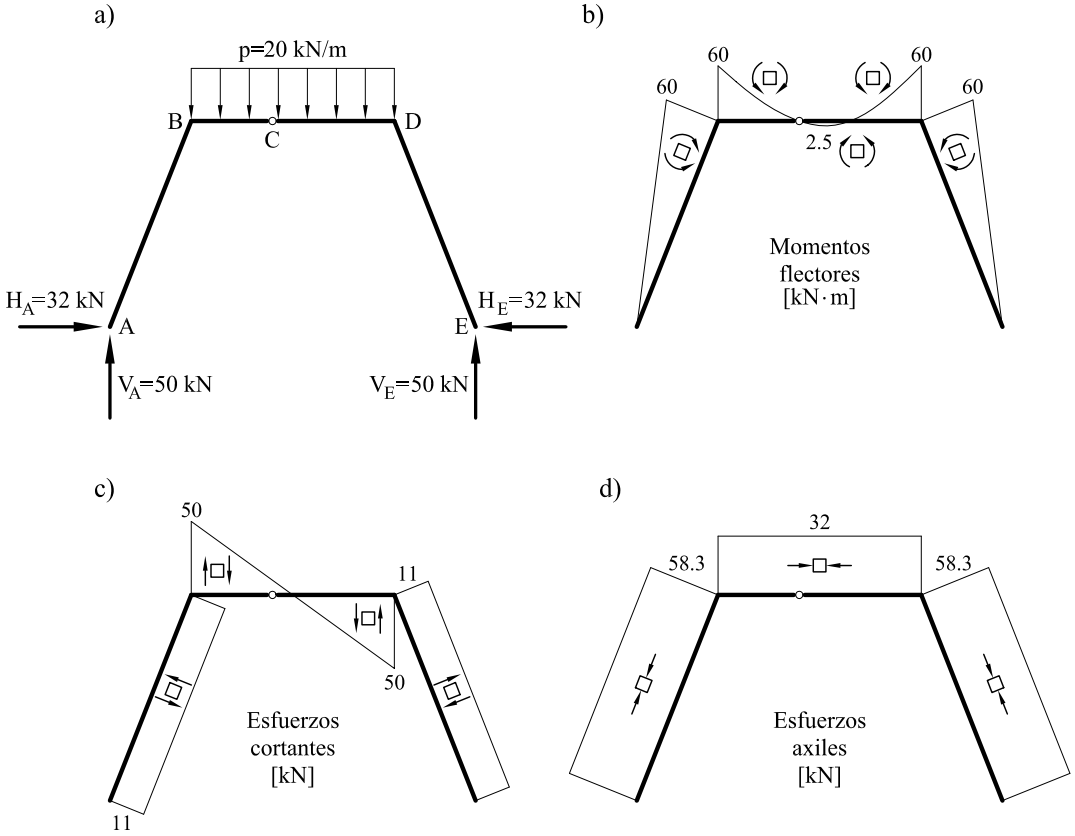

Fig. 2.33: Leyes de esfuerzos del Ejemplo 2.10.6

Ley de esfuerzos axiles

Procediendo de manera similar, se calculan los axiles en cada barra. Sobre los soportes, basta con proyectar sobre sus direcciones respectivas las reacciones horizontales y verticales de los apoyos correspondientes. En el dintel se sigue el mismo procedimiento, ya que la proyección de la carga lateral sobre la barra es nula.

Se obtienen así las leyes de esfuerzos axiles

$$N_{AB} = N_{DE} = -(V_A \sin\alpha + H_A \cos\alpha) = -58,3 \text{ kN}$$
$$N_{BD} = -H_A = -32 \text{ kN}$$

Se observa que son leyes constantes en cada tramo y, además, son simétricas.

En las Figura 2.33 se representan las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

2.12 Resolución de estructuras hiperestáticas

Como ya se ha definido en la Sección 2.10, una estructura es hiperestática cuando el número de reacciones exteriores y/o de fuerzas internas desconocidas es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio estático que se pueden imponer. Las ecuaciones adicionales necesarias para completar el planteamiento del problema hiperestático se encuentran considerando la deformación de la estructura, e imponiendo las necesarias condiciones de compatibilidad de movimientos. Combinando estas ecuaciones con las de equilibrio se resuelve *simultáneamente* el problema de determinar las fuerzas y los movimientos de la estructura.

Hay dos métodos básicos para obtener las ecuaciones adicionales: el *método de compatibilidad* (también llamado *método de las fuerzas* y *método de flexibilidad*) y el *método de equilibrio* (también llamado *método de los movimientos* y *método de rigidez*). El método de compatibilidad se basa en tomar a las fuerzas estáticamente indeterminadas como incógnitas del problema e imponer ecuaciones adicionales de compatibilidad de movimientos. El método de equilibrio se basa en tomar como incógnitas los movimientos de forma que cumplan las condiciones de compatibilidad e imponer ecuaciones de equilibrio para resolverlos. Ambos métodos se tratan en detalle en el Libro 2 de esta obra. En este apartado se describen sucintamente ambos métodos aplicados a la resolución de una estructura sencilla, pero estáticamente indeterminada.

2.12.1 Método de compatibilidad

El *método de compatibilidad* toma las fuerzas como incógnitas del problema. Las ecuaciones de equilibrio se escriben en función de las fuerzas aplicadas y de las reacciones. En un estructura hiperestática, el número de reacciones o fuerzas internas desconocidas excede el número de ecuaciones independientes de equilibrio en un número que, como hemos visto, se llama *grado de hiperestatismo*. Se selecciona un conjunto de fuerzas incógnita *redundantes* (reacciones o internas), se liberan las condiciones de apoyo o de enlace correspondientes, y se suponen las fuerzas redundantes actuando sobre la estructura *como si ésta fuese isostática (estructura isostática base)*. Se escribe entonces una *ecuación de compatibilidad* por cada punto donde se ha liberado un apoyo o enlace; esta ecuación debe imponer que los movimientos de la estructura "liberada" sean idénticos a los de la estructura original. Estas ecuaciones se expresan en función de las incógnitas hiperestáticas, con lo que se obtiene un sistema de ecuaciones lineales simultáneas cuya resolución permite determinar aquéllas.

En el Libro 2 de esta obra volveremos a plantear este método con más detalle, así como a estudiar su aplicación a estructuras articuladas hiperestáticas, vigas simples,

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

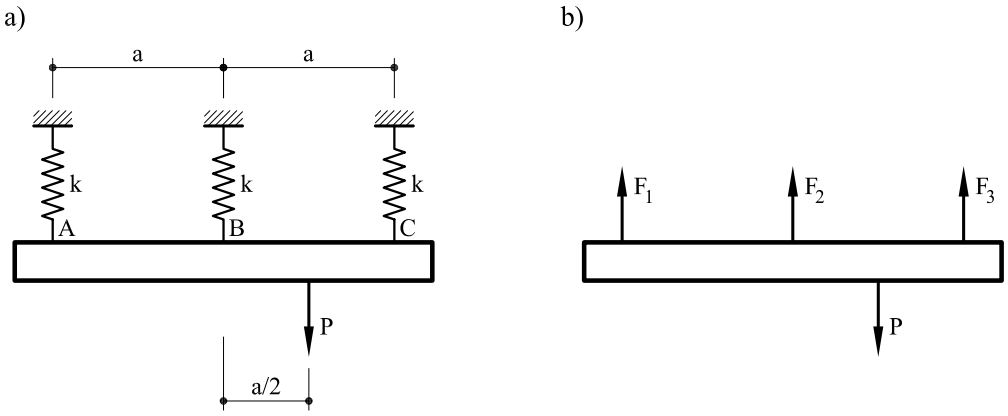

Fig. 2.34: Ejemplo de estructura hiperestática

vigas continuas y estructuras reticuladas de plano medio. Veamos ahora la aplicación de este método a través de un ejemplo sencillo.

La estructura de la Figura 2.34 está formada por tres muelles lineales de idéntica rigidez k que soportan una placa rígida. Se pretende determinar la fuerza que soporta cada muelle si sobre la placa actúa una fuerza P excéntrica como la dibujada.

Llamemos F_1, F_2 y F_3 a las fuerzas que soporta cada uno de los muelles. Las dos ecuaciones de equilibrio estático aplicables son:

$$\sum F_y = F_1 + F_2 + F_3 - P = 0 \tag{2.17a}$$

y

$$\sum M_A = aF_2 + 2aF_3 - \frac{3a}{2}P = 0 \tag{2.17b}$$

En este problema se tienen tres incógnitas y sólo dos ecuaciones, o sea que el problema es una vez hiperestático. Se elige, por ejemplo, como fuerza redundante F_2. En función de ésta, las ecuaciones de equilibrio se pueden reescribir como:

$$F_1 + F_3 = P - F_2 \tag{2.18a}$$

$$2F_3 = \frac{3}{2}P - F_2 \tag{2.18b}$$

La ecuación adicional necesaria para resolver el problema se obtiene tomando en cuenta los movimientos de la estructura. Así, el desplazamiento vertical del punto B en la placa rígida debe ser igual al alargamiento del muelle 2.

Los dos problemas estáticamente determinados que se deben resolver se muestran en la Figuras 2.35a y b, respectivamente.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

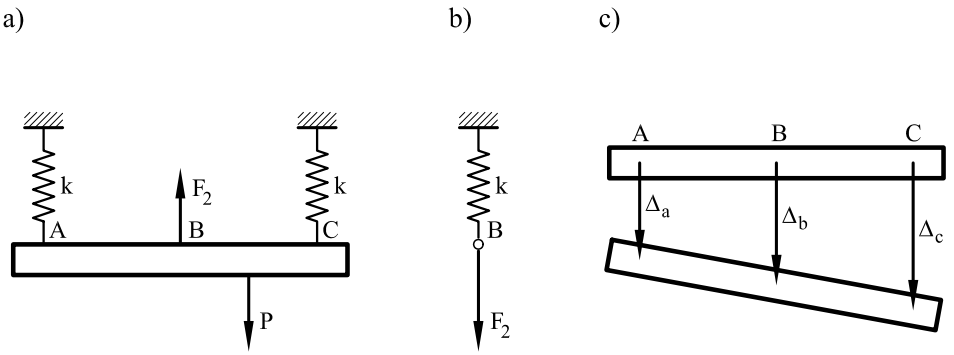

Fig. 2.35: Planteamiento del método de compatibilidad

Para el primer problema, indicado en la Figura 2.35a, despejamos de las ecuaciones de equilibrio F_1 y F_3 en función de la redundante F_2 y se obtiene:

$$F_1 = \frac{P}{4} - \frac{F_2}{2} \qquad ; \qquad F_3 = \frac{3P}{4} - \frac{F_2}{2} \tag{2.19}$$

Usando las relaciones fuerza-desplazamiento en los muelles 1 y 3 es posible calcular sus alargamientos y, por consiguiente, los desplazamientos verticales de los puntos A y C como

$$\Delta_A = \frac{F_1}{k} = \frac{P}{4k} - \frac{F_2}{2k} \tag{2.20a}$$

$$\Delta_C = \frac{F_3}{k} = \frac{3P}{4k} - \frac{F_2}{2k} \tag{2.20b}$$

Como la placa horizontal es rígida, es posible expresar el desplazamiento del punto B en función de los desplazamientos en A y en C, como se muestra en la Figura 2.35c. El desplazamiento en B es claramente el valor medio de los desplazamientos en A y en C, esto es,

$$\Delta_B = \frac{\Delta_A + \Delta_C}{2} = \frac{P}{2k} - \frac{F_2}{2k} \tag{2.21}$$

El segundo problema estáticamente determinado se muestra en la Figura 2.35b. Si la estructura debe quedar bien ajustada al recombinar los dos problemas estáticamente determinados, el desplazamiento en B en el primer problema debe ser igual al alargamiento del elemento central en el segundo problema, o sea

$$\Delta_B = F_2/k \tag{2.22}$$

Igualando las expresiones obtenidas para Δ_B en los dos problemas, (2.21) y (2.22), se tiene

$$\frac{P}{2k} - \frac{F_2}{2k} = \frac{F_2}{k} \tag{2.23}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

de donde se obtiene el valor de la incógnita hiperestática $F_2 = P/3$. F_1 y F_3 se pueden entonces determinar con las ecuaciones 2.19 como

$$F_1 = \frac{P}{12} \quad ; \quad F_3 = \frac{7P}{12} \tag{2.24}$$

Estas fuerzas verifican las ecuaciones de equilibrio originales. El alargamiento de cada elemento se puede determinar muy fácilmente con la fórmula

$$\Delta_i = \frac{F_i}{k} \tag{2.25}$$

Obsérvese que la elección de la fuerza F_2 como redundante es arbitraria. El problema puede resolverse de manera análoga tomando cualquiera de las otras dos fuerzas como incógnita hiperestática. Nótese también que se ha resuelto el problema mediante la imposición de *una sola ecuación de compatibilidad*, ya que el problema es *una vez hiperestático*.

2.12.2 Método de equilibrio

El *método de equilibrio* toma los movimientos como incógnitas del problema, expresados de tal forma que se respeten las condiciones de compatibilidad entre los distintos elementos. A continuación se escriben las ecuaciones de equilibrio en función de los movimientos *independientes*, para lo cual se utilizan las relaciones fuerza–desplazamiento de los elementos individuales. Por este procedimiento se obtiene un sistema de ecuaciones lineales simultáneas cuya resolución permite determinar los movimientos independientes incógnita. A partir de éstos se pueden determinar las fuerzas en los elementos volviendo a usar las relaciones fuerza–desplazamiento.

En el Libro 2 de esta obra volveremos a plantear este método con más detalle, así como a estudiar su aplicación a estructuras articuladas hiperestáticas, vigas continuas y estructuras reticuladas de plano medio. A manera de ejemplo, veamos ahora cómo resolver la estructura hiperestática de la Figura 2.34 aplicando el método de los movimientos.

Consideremos los movimientos de la estructura que se muestran en la Figura 2.35c. Aunque en la Figura se indican tres desplazamientos distintos, Δ_A, Δ_B y Δ_C, sólo dos de ellos son independientes debido a que la placa horizontal se mueve como cuerpo rígido. Para que se cumpla la condición de compatibilidad impuesta por el hecho de que la placa es rígida, debe ser

$$\Delta_B - \Delta_A = \Delta_C - \Delta_B \quad \Longrightarrow \quad \Delta_B = \frac{\Delta_A + \Delta_C}{2} \tag{2.26}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Por otra parte, las relaciones fuerza-desplazamiento para los tres muelles son

$$F_1 = k\Delta_A \quad ; \quad F_2 = k\Delta_B \quad ; \quad F_3 = k\Delta_C \tag{2.27}$$

Por último, se tienen las ecuaciones de equilibrio aplicables al problema. Éstas son:

$$F_1 + F_2 + F_3 = P \tag{2.28a}$$
$$aF_2 + 2aF_3 = \frac{3a}{2}P \tag{2.28b}$$

Sustituyendo en estas ecuaciones las relaciones (2.27) y eliminando Δ_B según (2.26), quedan en la forma

$$k\Delta_A + k\left(\frac{\Delta_A + \Delta_C}{2}\right) + k\Delta_C = P \tag{2.29a}$$
$$k\left(\frac{\Delta_A + \Delta_C}{2}\right) + 2k\Delta_C = \frac{3}{2}P \tag{2.29b}$$

operando, queda un sistema de la forma

$$\Delta_A + \Delta_C = \frac{2P}{3k} \tag{2.30a}$$
$$\Delta_A + 5\Delta_C = \frac{3P}{k} \tag{2.30b}$$

Este sistema de ecuaciones se resuelve para obtener

$$\Delta_A = \frac{P}{12k} \quad ; \quad \Delta_C = \frac{7P}{12k} \tag{2.31}$$

con $\Delta_B = 4P/12k$. Usando ahora las relaciones (2.27), se pueden calcular las fuerzas en los muelles como

$$F_1 = k\Delta_A = \frac{P}{12} \quad ; \quad F_2 = k\Delta_B = \frac{4P}{12} \quad ; \quad F_3 = k\Delta_C = \frac{7P}{12} \tag{2.32}$$

Obsérvese que se ha resuelto el problema mediante la imposición de *dos ecuaciones de equilibrio,* ya que el problema tiene *dos desplazamientos independientes.* Nótese también que los resultados obtenidos son, naturalmente, idénticos a los obtenidos con el método de compatibilidad.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

3 Esfuerzo Axil

3.1 Introducción

Una pieza está sometida a *tracción o compresión simple* cuando sobre sus secciones actúan únicamente esfuerzos axiles, es decir, fuerzas normales a las secciones y aplicadas en sus respectivos centros de gravedad (ver Figura 3.1). Consideramos positivos los axiles de tracción, y negativos los de compresión.

Dado que los diferentes esfuerzos que actúan sobre una sección no son sino las fuerzas y momentos resultantes de las tensiones que actúan sobre dicha sección, deben cumplirse las siguientes igualdades integrales:

$$N = \int_S \sigma_x \, dS \quad ; \quad T_y = \int_S \tau_{xy} \, dS = 0 \quad ; \quad T_z = \int_S \tau_{xz} \, dS = 0 \tag{3.1a}$$

$$M_t = \int_S (\tau_{xz} \, y - \tau_{xy} \, z) \, dS = 0 \tag{3.1b}$$

$$M_y = \int_S \sigma_x \, z \, dS = 0 \quad ; \quad M_z = -\int_S \sigma_x \, y \, dS = 0 \tag{3.1c}$$

Obviamente, estas ecuaciones integrales no bastan para determinar de forma única la distribución de tensiones en la sección. Es necesario, por tanto, establecer hipótesis simplificativas relativas a la deformación de la pieza que permitan tal determinación.

3.2 Esfuerzo axil en una pieza recta

En el caso de una pieza recta sometida a esfuerzo axil se hace la siguiente hipótesis de deformación, que se conoce con el nombre de *hipótesis de Bernouilli:*

"durante la deformación de una pieza recta sometida a esfuerzo axil las secciones transversales permanecen planas y paralelas a sí mismas".

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

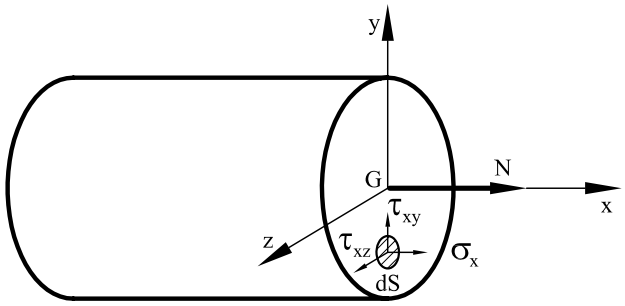

Fig. 3.1: Esfuerzo axil sobre una sección

Esta hipótesis puede comprobarse experimentalmente, siempre que la pieza sea larga y en las zonas en que pueda aplicarse el *principio de Saint-Venant.*

De acuerdo con la hipótesis anterior, una rebanada diferencial limitada por las secciones S_1 y S_2 puede deformarse de acuerdo con la Figura 3.2a, y transformarse en $S_1'S_2'$, o bien, según la Figura 3.2b, y transformarse en $S_1''S_2''$.

En el caso (a) no habrá distorsión de los elementos diferenciales de volumen, es decir, $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$ en todos los puntos de la sección y, en consecuencia, $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$. En el caso (b) se tiene $\gamma_{xy} = cte$ y $\gamma_{xz} = cte$, de acuerdo con la hipótesis de deformación y, por lo tanto, $\tau_{xy} = cte$ y $\tau_{xz} = cte$ para todos los puntos de la sección. Las ecuaciones (3.1b) que relacionan tensiones tangenciales y esfuerzos cortantes serán entonces:

$$T_y = \tau_{xy} \int_S dS = 0 \quad ; \quad T_z = \tau_{xz} \int_S dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \tag{3.2}$$

Por lo tanto, las tensiones tangenciales y las distorsiones necesariamente son nulas, con lo que la rebanada se deforma necesariamente según el caso (a), y las ecuaciones integrales segunda, tercera y cuarta se cumplen idénticamente.

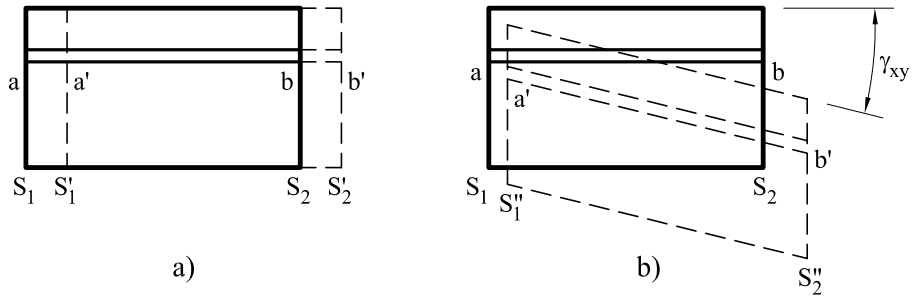

Fig. 3.2: Hipótesis de deformación de Bernouilli

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

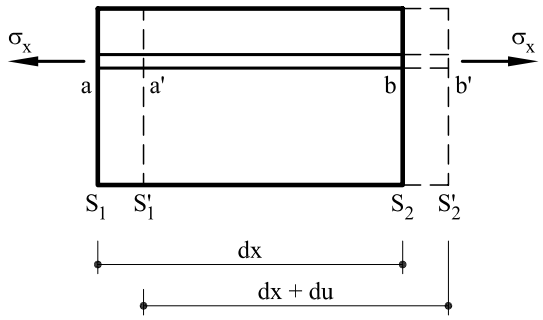

Fig. 3.3: Elongaciones y tensiones en la rebanada

Además, y según se muestra en la Figura 3.3, en la deformación de la rebanada todas las fibras se deforman paralelas al eje de la pieza y sufren una deformación longitudinal idéntica, e igual a:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \tag{3.3}$$

donde du es la elongación (positiva si es de alargamiento y negativa en caso contrario) de la rebanada de longitud dx.

Si el material de la pieza es elástico lineal y se cumple la ley de Hooke, la deformación longitudinal ϵ_x es igual a:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \tag{3.4}$$

donde E es el módulo de elasticidad del material y ν su coeficiente de Poisson. Al ser nulas o despreciables, en este caso, las tensiones normales en planos paralelos al eje de la pieza, σ_y y σ_z, se tiene simplemente:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_x = E\,\epsilon_x \tag{3.5}$$

Dado que las deformaciones son iguales para todas las fibras, también lo son las tensiones, es decir, existe una distribución uniforme de tensiones normales σ_x en cada sección de la viga. Por tanto, las ecuaciones primera, quinta y sexta en (3.1b) pueden escribirse:

$$N = \sigma_x \int_S dS = \sigma_x\, A \tag{3.6a}$$

$$M_y = \sigma_x \int_S z\, dS \equiv 0 \tag{3.6b}$$

$$M_z = \sigma_x \int_S y\, dS \equiv 0 \tag{3.6c}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

ya que los ejes $(y,\ z)$, al ser los ejes principales de inercia de la sección, pasan por el centro de gravedad de ésta. En lo sucesivo, denominaremos A al área de la sección. De la ecuación (3.6a) resulta:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \qquad \text{y} \qquad \epsilon_x = \frac{N}{EA} \tag{3.7}$$

La deformación longitudinal de la rebanada viene acompañada de una deformación lateral debida al efecto de Poisson de valor:

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x = -\frac{\nu N}{EA} \tag{3.8}$$

Asimismo, debe hacerse notar que la hipótesis de alargamiento uniforme de las fibras y la correspondiente distribución uniforme de tensiones normales es exacta cuando las fuerzas exteriores aplicadas estén uniformemente repartidas sobre las secciones correspondientes. En el caso de no serlo, según el Principio de Saint-Venant, los resultados obtenidos serán válidos para secciones alejadas lo suficiente de los puntos donde se aplican las cargas. La distancia a la que esta hipótesis será cierta es aproximadamente igual a las dimensiones transversales de la pieza. Así, en la Figura 3.4 la distribución de tensiones es uniforme en una sección tal como la S_B, suficientemente alejada de los extremos de la pieza, pero no en una como la S_A, donde el efecto local de cómo están aplicadas las cargas es aún perceptible.

La variación de longitud total de la pieza, es decir, *el alargamiento* o *el acortamiento* de ésta, se obtiene por integración de las deformaciones longitudinales sobre todas las

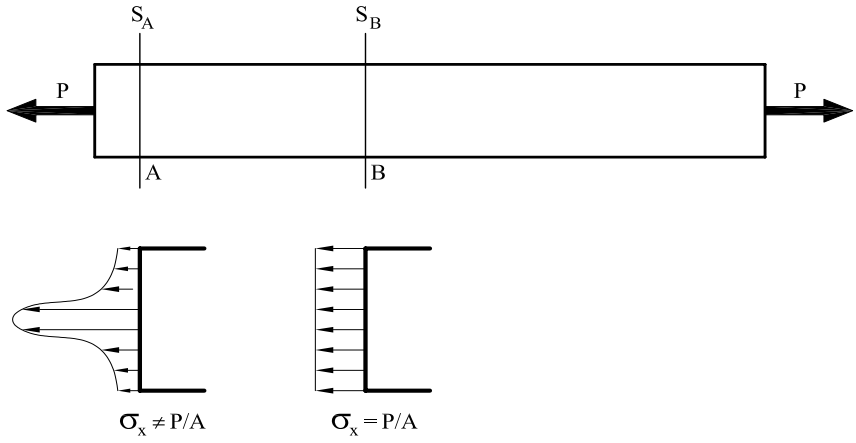

Fig. 3.4: Esfuerzo axil y Principio de Saint-Venant

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

rebanadas de la pieza, es decir:

$$\Delta l = \int_l \epsilon_x(x)\, dx = \int_l \frac{N(x)}{EA(x)}\, dx \tag{3.9}$$

donde se admite que tanto la ley de axiles, $N(x)$, como la sección de la pieza, $A(x)$, puedan variar a lo largo de la longitud l de ésta. Si la sección de la pieza A es constante y la ley de esfuerzos axiles es uniforme, el alargamiento total de la pieza es:

$$\Delta l = \frac{N\, l}{EA} \tag{3.10}$$

Esta expresión puede escribirse como $\Delta l = N\,/k$, con $k = EA/l$, representando la *rigidez* de la pieza a esfuerzo axil.

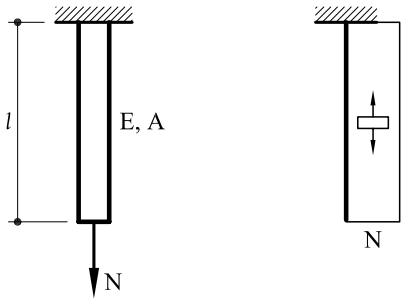

Fig. 3.5: Axil uniforme

Las fórmulas anteriores valen tanto para esfuerzos de compresión como para esfuerzos de tracción. En el caso de compresión, todo lo anterior es válido a condición de que la pieza no sea demasiado larga en relación a las dimensiones de la sección transversal, porque en ese caso el equilibrio de la pieza puede ser inestable, fenómeno conocido con el nombre de *pandeo*.

Ejemplo 3.2.1

Calcular el alargamiento total de una pieza de sección constante A y longitud l, sometida a la acción de su propio peso Q uniformemente repartido.

Sea $\gamma = Q\,/Al$ el peso específico del material de la pieza. Según se observa en la Figura 3.6, la ley de axiles es lineal, y viene dada por la expresión:

$$N(x) = \gamma\, A\, x$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

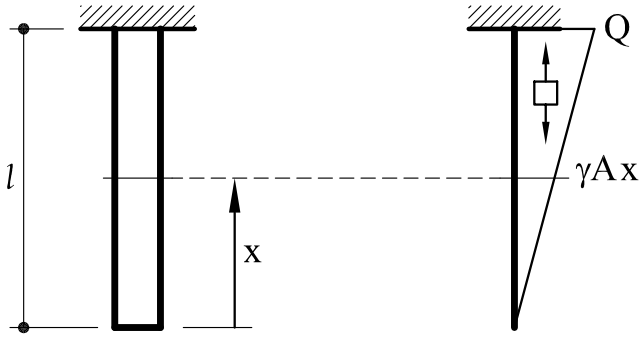

Fig. 3.6: Pieza sometida a peso propio

La ley de tensiones sobre cada sección se obtiene simplemente como :

$$\sigma_x = \frac{N(x)}{A} = \gamma\, x$$

y es también lineal. El alargamiento total será igual a:

$$\Delta\, l = \int_l \frac{N(x)}{EA} dx = \int_o^l \frac{\gamma\, x dx}{E} = \frac{\gamma\, l^2}{2E} = \frac{Ql}{2EA}$$

Ejemplo 3.2.2

Calcular la máxima longitud que puede tener un cable suspendido verticalmente y sometido a su peso propio. Supóngase una tensión admisible de valor σ^*.

Según los resultados del ejercicio anterior, la tensión máxima se produce en la sección superior del cable, que soporta una tensión

$$\sigma_x(x = l) = \frac{\gamma\, A\, l}{A} = \gamma\, l$$

y debe ser

$$\sigma_x \leq \sigma^* \qquad \Rightarrow \qquad l_{\max} \leq \frac{\sigma^*}{\gamma}$$

Para un acero de alta resistencia se puede suponer un peso específico de $\gamma = 7.500$ kg/m^3 y una tensión admisible de $\sigma^* = 1.500$ MPa $= 1.500$ N/mm^2. Operando, resulta una longitud máxima de $l_{\max} \leq 20$ x 10^3 m $= 20$ km.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ejemplo 3.2.3

Un soporte de peso específico γ está sometido a su propio peso y a una carga de compresión P. Determinar la ley de variación de la sección para que las tensiones sean uniformes a lo largo de todo el soporte.

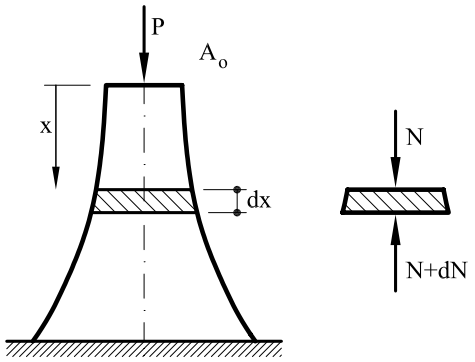

Fig. 3.7: Prisma isorresistente

Del equilibrio de la rebanada, ver Figura 3.7, se puede escribir:

$$N + dN = N + \gamma\, A\, dx$$

luego la variación del esfuerzo axil viene dada por:

$$dN = \gamma\, A\, dx \tag{a}$$

Además, según las condiciones del problema, el esfuerzo axil debe ser:

$$N = \sigma_x\, A = \frac{P}{A_o} A$$

donde A_o es el área de la sección extrema sobre la que se aplica la carga P. Diferenciando la expresión anterior, donde P y A_o son constantes, se tiene:

$$dN = \frac{P}{A_o} dA \tag{b}$$

Igualando las ecuaciones (a) y (b) se tiene que:

$$\frac{P}{A_o} dA = \gamma\, A\, dx \qquad \Rightarrow \quad \frac{dA}{A} = \frac{\gamma A_o}{P} dx$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Integrando esta última igualdad, se obtiene:

$$ln\, A = \frac{\gamma A_o}{P} x + C' \qquad \Rightarrow \qquad A = C\, e^{\frac{\gamma A_o}{P} x}$$

e imponiendo la condición de que:

$$A(x = 0) = A_o \qquad \Rightarrow \qquad C = A_o$$

Por tanto:

$$A(x) = A_o\, e^{\frac{\gamma A_o}{P} x}$$

que define la variación de sección en el llamado *prisma isorresistente*, que se representa en la Figura 3.7.

Obsérvese que la variación de área calculada crece de forma exponencial a lo largo del eje de la pieza. Este crecimiento será tanto más rápido cuanto mayor sea el peso de la pieza frente a la carga en el extremo.

3.3 Secciones de varios materiales

Consideremos una pieza formada por varios materiales de forma que las interficies entre ellos sean paralelas a la directriz de la pieza. Esto es, consideremos que la sección recta de la pieza está dividida en varias zonas Ω_i, cada una de las cuales tiene un área A_i, correspondientes a un material que tiene un módulo elástico E_i, tal como se muestra en la Figura 3.8a.

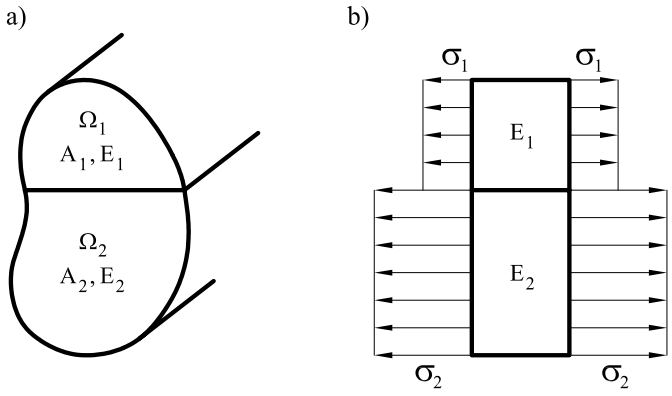

Fig. 3.8: Sección de varios materiales

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Consideremos también un *material de referencia*, que puede ser o no igual a uno de los materiales componentes de la pieza, y que tiene un módulo de elasticidad $\overline{E}$. Para cada material de la sección se puede definir un *coeficiente de equivalencia* con el material de referencia de la forma $n_i = E_i/\overline{E}$.

Supongamos que la deformación de la pieza tiene lugar según la hipótesis de Bernouilli, de manera análoga a las piezas de un único material. En este caso todas las fibras longitudinales de la pieza tiene idéntica deformación longitudinal ϵ_x. La tensión en un punto perteneciente al material i será

$$\sigma_x = E_i\,\epsilon_x = n_i\,\overline{E}\,\epsilon_x \tag{3.11}$$

La satisfación de la ecuación de equilibrio interno se escribe ahora:

$$N = \int_S \sigma_x\,dS = \int_S n_i\,\overline{E}\,\epsilon_x\,dS = \overline{E}\,\epsilon_x \int_S n_i\,dS = \overline{E\,A}\,\epsilon_x \tag{3.12}$$

donde a la integral $\overline{A} = \int_S n_i\,dS$ se le llama *área homogeneizada* o *área equivalente* de la sección. A partir de la ecuación anterior, se obtiene el alargamiento de las fibras:

$$\epsilon_x = \frac{N}{\overline{EA}} \tag{3.13}$$

y combinando las ecuaciones (3.13) y (3.11) se tiene que la tensión es diferente para cada material y vale:

$$\sigma_x = E_i\,\epsilon_x = n_i\,\frac{N}{\overline{A}} \tag{3.14}$$

lo que quiere decir que los materiales más rígidos soportan tensiones más elevadas, tal como se muestra en la Figura 3.8b.

En la práctica es habitual utilizar secciones compuestas; tal es el caso de las secciones mixtas de hormigón y acero, o el caso del hormigón armado con barras de acero. El coeficiente de equivalencia entre el acero y el hormigón es $n = E_a/E_h \simeq 7 \div 10$.

Ejemplo 3.3.1

Una columna de hormigón armado de longitud $l = 5$ m soporta una carga en su extremo superior de $P = 1.000$ kN, tal como se muestra en la Figura 3.9. La sección de la columna es cuadrada, con el lado $a = 30$ cm, y está armada con 8 redondos de acero de diámetro $\phi = 20$ mm. Los módulos elásticos del hormigón y del acero son $E_h = 25$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

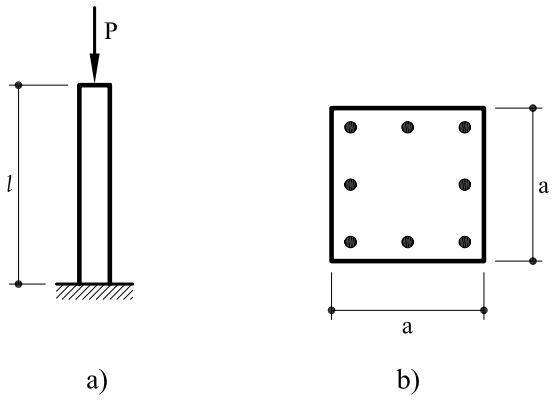

Fig. 3.9: Columna de hormigón armado

GPa y $E_a = 200$ GPa, respectivamente. Se pide calcular: (a) las tensiones sobre el hormigón y el acero, y (b) el acortamiento elástico de la columna.

(a) El área de acero es $A_a = 8 \times (\pi \cdot \phi^2)/4 = 25$ cm^2. El área de hormigón es $A_h = a^2 - A_a = 875$ cm^2. Tomando como material de referencia el hormigón ($\overline{E} = E_h$) tenemos que el coeficiente de equivalencia del acero es $n_a = E_a/E_h = 8$. Además, el área homogeneizada de la sección vale

$$\overline{A} = A_h + n_a A_a = 1.075 \text{ cm}^2$$

Aplicando las fórmulas 3.13 y 3.14, y dado que el axil es constante y de valor $N = P$, se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_h &= E_h\,\epsilon_x = \frac{N}{\overline{A}} = \frac{10^6}{1075 \cdot 10^{-4}} \text{ Pa} = 9,30 \text{ MPa} \\ \sigma_a &= E_a\,\epsilon_x = n_a \frac{N}{\overline{A}} = \frac{8 \cdot 10^6}{1075 \cdot 10^{-4}} \text{ Pa} = 74,42 \text{ MPa} \end{aligned}$$

(b) Dado que la deformación es uniforme a lo largo de la columna, el acortamiento elástico se puede calcular de la forma

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{N\,l}{\overline{E}\overline{A}} \\ &= \frac{10^6 \cdot 5}{25 \cdot 10^9 \cdot 1075 \cdot 10^{-4}} \text{ m} \\ &= 1,86 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,86 \text{ mm} \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ejemplo 3.3.2

La pieza de hormigón pretensado de la Figura 3.10a, de sección cuadrada de lado a ($a = 20$ cm), y longitud l ($l = 5$ m), se fabrica de la siguiente manera: (a) se tesan 4 redondos de acero de diámetro $\phi = 20$ mm, situados en horizontal, con una fuerza $F = 10$ kN cada uno, (b) se hormigona la sección cuadrada, y (c) una vez endurecido el hormigón se cortan los redondos por los extremos AA' y BB'. Los módulos elásticos del hormigón y del acero son $E_h = 25$ GPa y $E_a = 200$ GPa, respectivamente. Calcular: (a) la distribución de tensiones resultante del proceso de fabricación en el hormigón y en el acero, (b) las tensiones sobre el hormigón y el acero para un esfuerzo axil de tracción $N = 40$ kN y (c) el acortamiento final de la pieza.

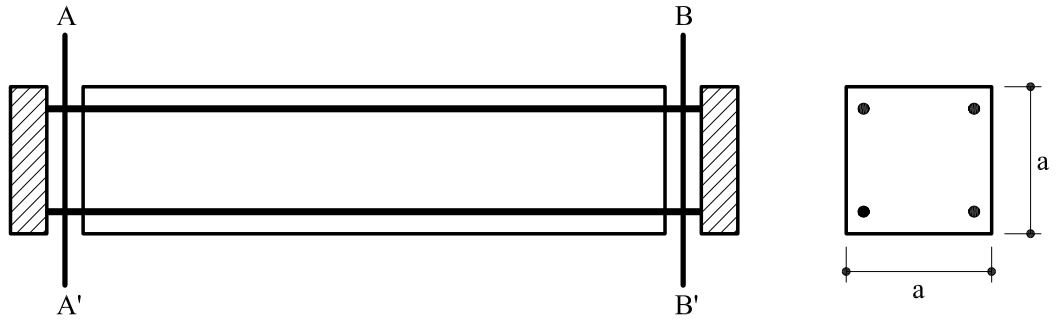

Fig. 3.10: Ejemplo 3.3.2

El área de acero es $A_a = 4$ x $(\pi \cdot 2^2)/4 = 12,57$ cm^2. El área de hormigón es $A_h = 20 \cdot 20 - A_a = 387,4$ cm^2. Tomando como material de referencia el hormigón ($\overline{E} = E_h$), el coeficiente de equivalencia del acero es $n_a = E_a/E_h = 8$. Además, el área homogeneizada de la sección vale $\overline{A} = A_h + n_a A_a = 488,0$ cm^2.

(a) La tensión de tracción que soporta cada uno de los redondos una vez tesado es:

$$\sigma^o_{\text{red}} = \frac{10 \cdot 10^3}{3,142 \cdot 10^{-4}} \text{ Pa} = +31,83 \text{ MPa}$$

El hecho de cortar los redondos, una vez endurecido el hormigón, es equivalente a aplicar una fuerza de $4F = 40$ kN de compresión sobre las secciones extremas de la pieza. Esta fuerza produce en el hormigón una distribución uniforme de tensiones de compresión de valor

$$\sigma^o_h = \frac{-40 \cdot 10^3}{488,0 \cdot 10^{-4}} \text{ Pa} = -0,820 \text{ MPa}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Por otro lado, la tensión en el acero después del proceso de fabricación es

$$\begin{aligned}\sigma_a^o &= \sigma_{\text{red}}^o + \Delta\sigma_a^o \\ &= \frac{10\cdot 10^3}{3,142\cdot 10^{-4}} + 8\cdot\frac{-40\cdot 10^3}{488,0\cdot 10^{-4}}\ \text{Pa} \\ &= +25{,}27\ \text{MPa}\end{aligned}$$

donde el primer término corresponde a la tensión de pretesado y el segundo representa la pérdida de tensión al cortar los redondos.

La distribución de tensiones en la sección después del proceso de fabricación es autoequilibrada, al no actuar sobre la pieza solicitación exterior alguna.

(b) La actuación de un esfuerzo axil de tracción $N = 40$ kN implica unos incrementos de tensión en el hormigón y en acero de

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_h &= \frac{40\cdot 10^3}{488,0\cdot 10^{-4}}\ \text{Pa} = +0,820\ \text{MPa} \\ \Delta\sigma_a &= 8\cdot\frac{40\cdot 10^3}{488,0\cdot 10^{-4}}\ \text{Pa} = +6,557\ \text{MPa}\end{aligned}$$

Las tensiones finales son:

$$\begin{aligned}\sigma_h^f &= \sigma_h^o + \Delta\sigma_h = 0,0\ \text{MPa} \\ \sigma_a^f &= \sigma_a^o + \Delta\sigma_a = +31,83\ \text{MPa}\end{aligned}$$

Se ha conseguido, por tanto, aplicar un axil de tracción sobre la pieza, sin que el hormigón soporte tensiones de tracción.

(c) El acortamiento inicial de la pieza es

$$\Delta l^o = \frac{N\,l}{\overline{\overline{E}}\,\overline{\overline{A}}} = \frac{-40\cdot 10^3\cdot 5}{25\cdot 10^9\cdot 488,0\cdot 10^{-4}}\ \text{m} = -1,64\cdot 10^{-4}\ \text{m}$$

El incremento longitud debido a la acción del axil aplicado es

$$\Delta l = \frac{N\,l}{\overline{\overline{E}}\,\overline{\overline{A}}} = \frac{40\cdot 10^3\cdot 5}{25\cdot 10^9\cdot 488,0\cdot 10^{-4}}\ \text{m} = +1,64\cdot 10^{-4}\ \text{m}$$

y el alargamiento final de la pieza es

$$\Delta l^f = \Delta l^o + \Delta l = 0$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

3.4 Estructuras articuladas

Se llama *estructura articulada* a aquella que está formada por un ensamblaje de piezas unidas unas a otras mediante articulaciones. Al ser los nudos articulados, las piezas no pueden transmitirse momentos flectores unas a otras, lo que implica que el momento flector en los extremos de todas las barras es nulo. En estas circunstancias, el momento flector en el interior de las barras se deberá unicamente o a las cargas que se aplican directamente sobre las piezas, y no en los nudos, o a la curvatura de las piezas.

Si nos restringimos al caso habitual de estructuras de piezas rectas con cargas aplicadas en los nudos[1], es obvio que tales estructuras trabajan exclusivamente a esfuerzo axil, siendo además estos axiles constantes en cada una de las piezas. *Resolver* una

[1] Esto implica que el peso propio de las piezas, o bien es despreciable frente a las demás cargas, o bien se considera concentrado en los nudos de ésta.

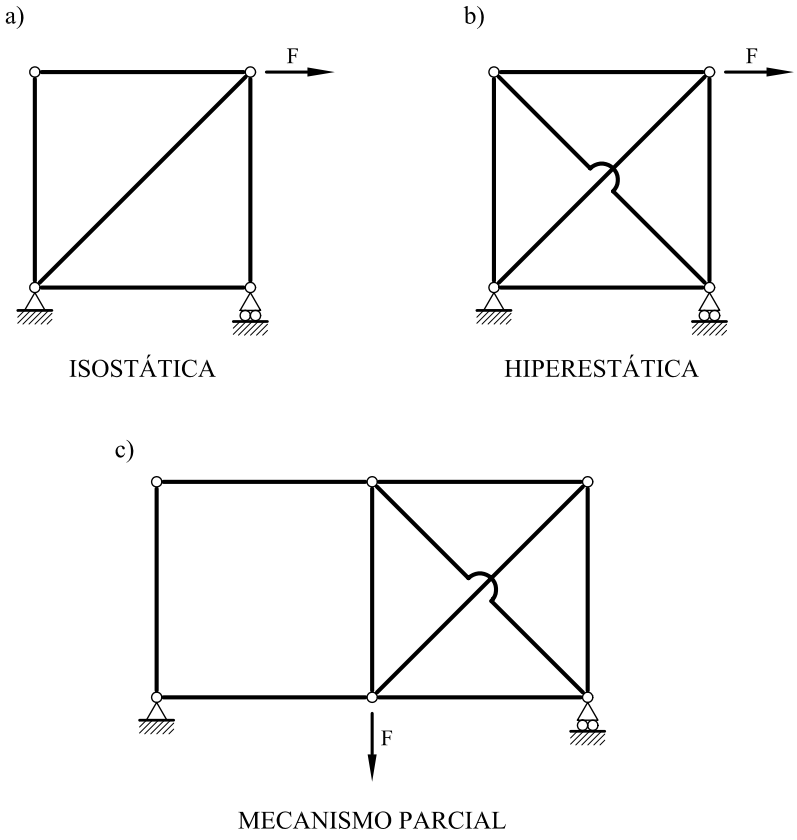

Fig. 3.11: Estructuras articuladas

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

estructura articulada de estas características quiere decir, por tanto, hallar los valores de los axiles que actúan sobre cada una de las barras de la estructura.

3.4.1 Estructuras articuladas isostáticas

Si la estructura articulada en cuestión es isostática, puede resolverse utilizando únicamente las ecuaciones de la Estática. Esto quiere decir que el número de incógnitas del problema, o sea, el número de reacciones exteriores nr más el número de axiles a determinar nb (igual al número de barras) es igual al número de ecuaciones de la estática que se pueden plantear, o sea, para un problema plano, el doble del número de nudos $2\,nn$ (se pueden plantear 2 ecuaciones de equilibrio de fuerzas para cada nudo). Esto es:

$$nr + nb = 2\,nn \tag{3.15}$$

En la Figura 3.11a se muestra una estructura articulada isostática ($nr = 3$, $nb = 5$, $nn = 4$), mientras que la mostrada en la Figura 3.11b es hiperestática de grado 1 ($nr = 3$, $nb = 6$, $nn = 4$). Es importante destacar que la condición (3.15) es *necesaria pero no suficiente* para que la estructura sea isostática. Así, la "estructura" de la Figura 3.11c satisface la condición ($nr = 3$, $nb = 9$, $nn = 6$) pero es, sin embargo, un mecanismo en su parte izquierda, mientras que su parte derecha es internamente hiperestática.

En cualquier caso, la condición (3.15) refleja el procedimiento para resolver estructuras articuladas isostáticas: siendo las incógnitas las nr reacciones exteriores más los nb axiles en las barras, se plantean en función de éstas las necesarias ecuaciones de equilibrio de fuerzas en los nudos, $2\,nn$ ó $3\,nn$, según el problema sea plano o espacial, respectivamente. El procedimiento se ilustra con ayuda de algunos ejemplos.

Ejemplo 3.4.1.1

La estructura articulada ACB de la Figura 3.12a está formada por dos barras del mismo material y secciones transversales diferentes, de áreas A_1 y A_2. Para una carga vertical P actuando en el nudo C, determinar: (a) los axiles y tensiones en las barras y (b) el desplazamiento del nudo C. Tomar $P = 40$ kN, $L = 3$ m, $\alpha = 30^o$, $A_1 = 5$ cm^2, $A_2 = 10$ cm^2, $E = 200 \cdot 10^9$ N/m^2.

(a) La estructura es isostática, y los axiles en las barras 1 y 2 pueden calcularse directamente al considerar el equilibrio de fuerzas en el nudo C (Figura 3.12b).

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

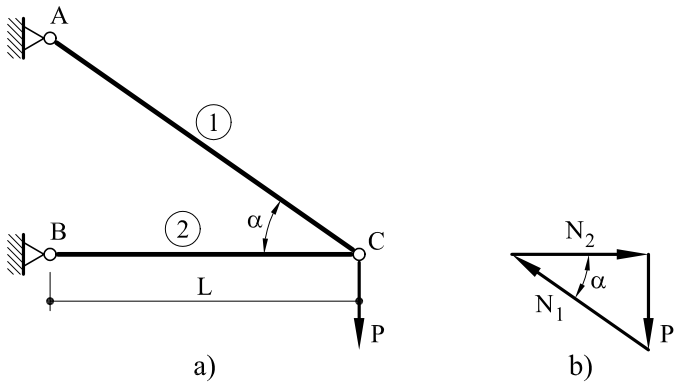

Fig. 3.12: Estructura articulada del Ejemplo 3.4.1.1

Así:

$$N_1 = \frac{P}{\sin\,\alpha} \quad ; \quad N_2 = -\frac{P}{\tan\,\alpha}$$

La barra 1 trabaja a tracción y la barra 2 a compresión. Las tensiones en las barras son

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N_1}{A_1} = \frac{P}{A_1 \sin\,\alpha} = +160 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= \frac{N_2}{A_2} = \frac{-P}{A_2 \tan\alpha} = -69,3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

(b) El alargamiento de la barra 1 es

$$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{EA_1} = \frac{PL\,/\cos\alpha}{\sin\alpha\, EA_1} = \frac{PL}{\sin\alpha\cos\,\alpha}\frac{1}{EA_1} = 0,277 \text{ cm}$$

El acortamiento de la barra 2 es

$$\delta_2 = \frac{|N_2|\,L_2}{EA_2} = \frac{PL}{\tan\alpha\; EA_2} = 0,104 \text{ cm}$$

El movimiento del punto C puede calcularse a partir del esquema que se muestra en la Figura 3.13a. En ella se observa como la barra 1 se alarga hasta C''' y luego gira alrededor del punto A (según la hipótesis de pequeños giros). Por su parte, la barra 2 se acorta hasta C'' y luego gira alrededor del punto B. La intersección de las rectas $C''C'$ y $C'''C'$ determina la posición del punto C', destino del punto C tras la deformación de la estructura. Los desplazamientos del nudo C se determinan resolviendo el polígono cerrado de la Figura 3.13b, que se denomina *polígono de Winkler*.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

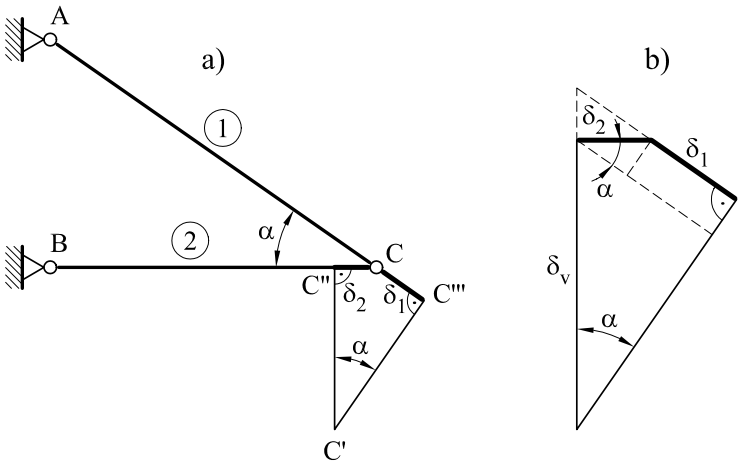

Fig. 3.13: Desplazamientos en la estructura articulada del Ejemplo 3.4.1.1

El desplazamiento horizontal del nudo C es simplemente

$$\delta_h = \delta_2 = 0,104 \text{ cm} \quad (\leftarrow)$$

El desplazamiento vertical del punto C, $\delta_v = \overline{C''C'}$, se obtiene proyectando dicho desplazamiento sobre la línea perpendicular a $C'''C'$ que pasa por C'' :

$$\delta_v \sin \alpha = \delta_1 + \delta_2 \cos \alpha$$

de donde

$$\delta_v = \frac{\delta_1 + \delta_2 \cos \alpha}{\sin \alpha} = 0,734 \text{ cm} \quad (\downarrow)$$

Ejemplo 3.4.1.2

La estructura articulada de la Figura 3.14 está formada por cinco barras del mismo material y secciones transversales iguales, de área A. Para una fuerza horizontal F actuando en el nudo B, determinar: (a) los axiles en las barras y (b) el desplazamiento del nudo B. Tomar $F = 10$ kN, $a = 4$ m, $A = 5$ cm^2, $E = 200 \cdot 10^9$ N/m^2.

(a) La estructura es isostática y las reacciones en los apoyos C y D pueden determinarse por equilibrio de fuerzas y momentos. Así:

$$H_C = F \quad ; \quad V_C = F \quad ; \quad V_D = F$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

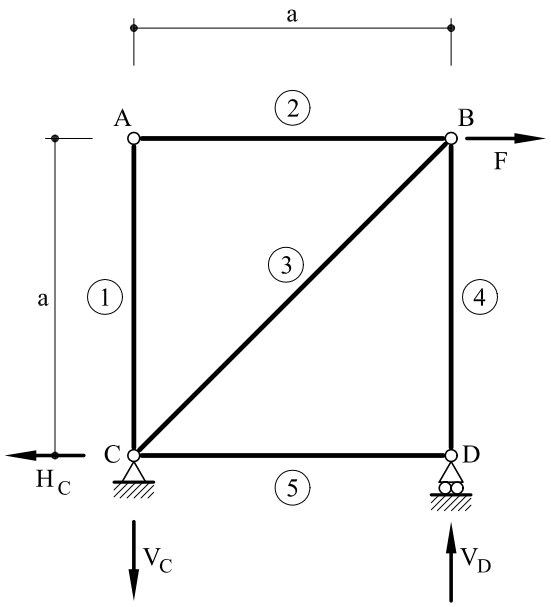

Fig. 3.14: Estructura articulada del Ejemplo 3.4.1.2

Análogamente, los axiles en las barras pueden calcularse considerando el equilibrio de fuerzas los nudos (Figuras 3.15a y b). Así:

$$\begin{array}{lcl} \text{nudo } D & \Rightarrow & N_4 = -F \quad ; \quad N_5 = 0 \\ \text{nudo } C & \Rightarrow & N_1 = 0 \quad ; \quad N_3 = \sqrt{2}F \\ \text{nudo } A & \Rightarrow & N_2 = 0 \end{array}$$

La barra 3 trabaja a tracción y la barra 4 a compresión. Las barras 1, 2 y 5 no trabajan para la carga aplicada en este caso.

(b) El alargamiento de la barra 3 es

$$\delta_3 = \frac{N_3 L_3}{EA} = \frac{\sqrt{2}F\sqrt{2}a}{EA} = 2\frac{Fa}{EA} = 0,8 \text{ mm}$$

El acortamiento de la barra 4 es

$$\delta_4 = \frac{|N_4|\, L_4}{EA} = \frac{Fa}{EA} = 0,4 \text{ mm}$$

El movimiento del punto B puede calcularse a partir del esquema que se muestra en la Figura 3.15c. En ella se observa como la barra 3 se alarga hasta B''' y luego gira

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

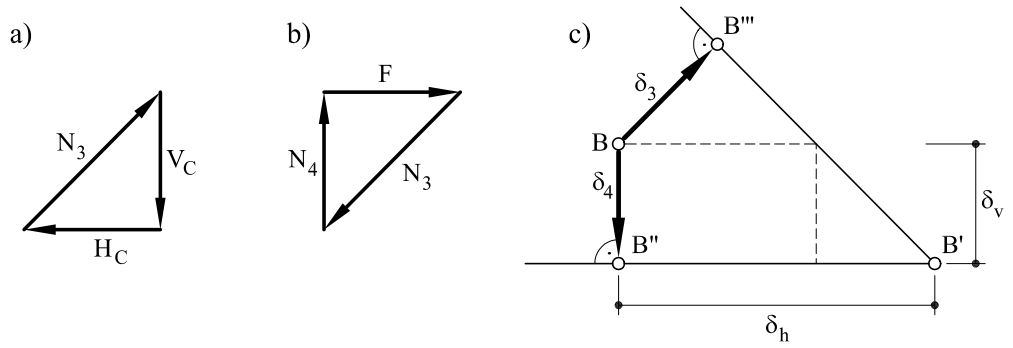

Fig. 3.15: Equilibrio y desplazamientos en Ejemplo 3.4.1.2

alrededor del punto C (según la hipótesis de pequeños giros). Por su parte, la barra 4 se acorta hasta B'' y luego gira alrededor del punto D, que es fijo, ya que la barra 5 no trabaja. La intersección de las rectas $B''B'$ y $B'''B'$ determina la posición del punto B'. Los desplazamientos vertical y horizontal del nudo B son (Figura 3.15c):

$$\delta_v = \delta_4 = 0,4 \text{ mm } (\downarrow) \quad ; \quad \delta_h = \sqrt{2}\delta_3 + \delta_4 = 1,531 \text{ mm } (\rightarrow)$$

El desplazamiento total del nudo B es

$$\delta_B = \sqrt{\delta_h^2 + \delta_v^2} = \sqrt{(0,4)^2 + (1,531)^2} = 2,50 \text{ mm}$$

3.4.2 Estructuras articuladas hiperestáticas

Una estructura articulada es hiperestática cuando el número de incógnitas del problema, o sea, el número de reacciones exteriores nr más el número de axiles a determinar nb (igual al número de barras), es mayor que el número de ecuaciones de la estática que se pueden plantear, esto es, para un problema plano, el doble del número de nudos $2nn$. Esto es:

$$nr + nb > 2\,nn \tag{3.16}$$

La condición (3.16) refleja que para resolver estructuras articuladas hiperestáticas no basta con imponer de forma sistemática las condiciones de equilibrio de fuerzas en los nudos. Como ya se explicó en el Capítulo 2, la resolución de estructuras hipestáticas requiere, además, la consideración de las condiciones de compatibilidad sobre la deformada de la estructura. En el Capítulo 1 del Libro 2 de esta obra se muestran ejemplos de resolución de estructuras articuladas espaciales por el método de compatibilidad y el método de equilibrio.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

4 Momento Flector

4.1 Introducción

Una pieza está sometida a *flexión pura* cuando sus secciones están solicitadas únicamente por un momento flector M. Los esfuerzos axil N, cortante T y momento torsor M_t son nulos en todas las secciones de la pieza. Por su parte, una pieza está sometida a *flexión simple* cuando sus secciones están sometidas a momento flector variable y, en consecuencia, viene acompañado de esfuerzo cortante. Por el contrario, se dice que una sección está sometida a *flexión compuesta* cuando sobre ella actúa un momento flector y un esfuerzo axil. Por último, si actúan a la vez momentos flectores y momento torsor, se dice que la sección está sometida a *flexo-torsión*.

Así por ejemplo, el voladizo de la Figura 4.1a está sometido a flexión pura en toda su longitud, mientras que el de la Figura 4.1b tiene parte de su longitud en flexión pura y parte en flexión simple. Asimismo, la viga de la Figura 4.2 tiene su parte central sometida a flexión pura, mientras que las zonas entre los apoyos y las cargas están sometidas a flexión simple; de hecho, ésta es una de las maneras utilizadas en la práctica para conseguir materializar una situación de flexión pura.

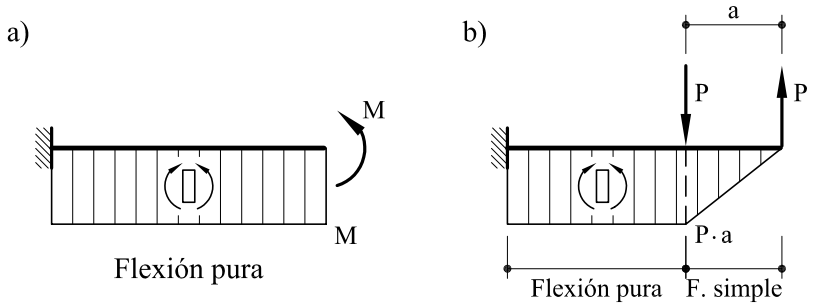

Fig. 4.1: Voladizo sometido a (a) flexión pura y (b) flexión pura y flexión simple

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

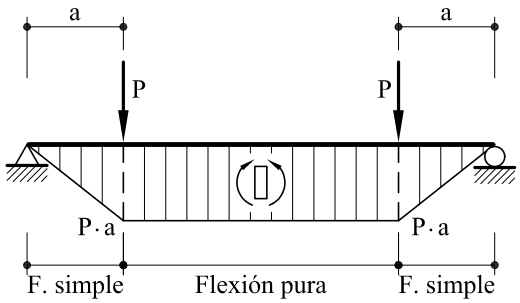

Fig. 4.2: Viga biapoyada sometida a flexión pura en su zona central

La flexión pura es, por tanto, el caso más sencillo de flexión que se puede plantear, aunque sea una forma de solicitación poco habitual en la práctica. Sin embargo, su interés se debe a que los resultados que se deducen de su estudio pueden aplicarse a los casos más corrientes de flexión simple o flexión compuesta, siempre que se tengan en cuenta, de forma adecuada, las diferencias entre unos casos y otros. Abordaremos con detalle, pues, en este Capítulo el estudio de la flexión pura, para generalizar luego los resultados obtenidos al caso de flexión simple y, en el siguiente Capítulo, a la flexión compuesta.

Dado que los diferentes esfuerzos que actúan sobre una sección no son sino las fuerzas y momentos resultantes de las tensiones que actúan sobre dicha sección, en el caso de *flexión pura* con momentos flectores M_y y M_z constantes, deben cumplirse las igualdades:

$$N = \int_S \sigma_x \, dS = 0 \quad ; \quad T_y = \int_S \tau_{xy} \, dS = 0 \tag{4.1a}$$

$$T_z = \int_S \tau_{xz} \, dS = 0 \quad ; \quad M_t = \int_S (\tau_{xz}\, y - \tau_{xy}\, z) \, dS = 0 \tag{4.1b}$$

$$M_y = \int_S \sigma_x \, z \, dS \quad ; \quad M_z = -\int_S \sigma_x \, y \, dS \tag{4.1c}$$

tal y como se vio en el Capítulo 2. Estas ecuaciones integrales no bastan para determinar la distribución de tensiones en la sección. Es necesario, por tanto, establecer hipótesis simplificativas relativas a la deformación de la sección, de forma análoga a como se hizo en el caso del esfuerzo axil. Estudiaremos primero el caso más intuitivo de flexión pura en vigas rectas de plano medio (esto es, de sección con un plano de simetría longitudinal flectando en dicho plano, ver Figura 4.3a), para llegar después al caso general de sección arbitraria solicitada en un plano cualquiera (ver Figura 4.3b).

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

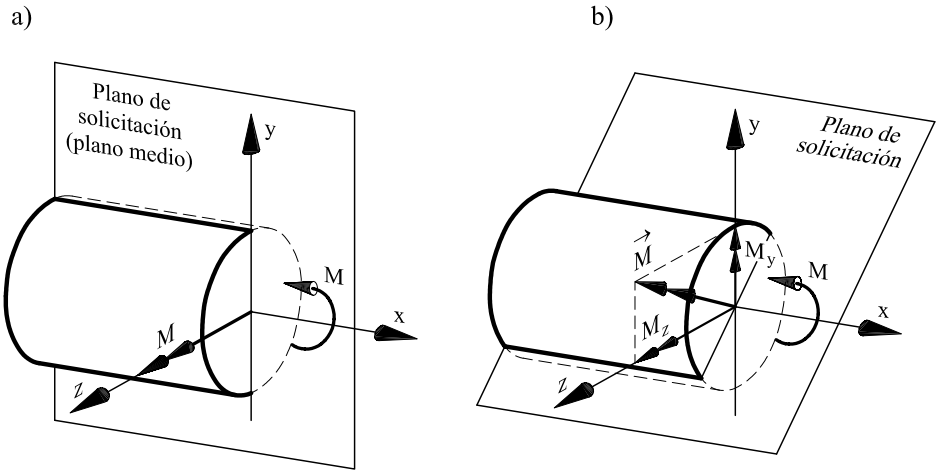

Fig. 4.3: Flexión (a) recta en piezas de plano medio y (b) esviada

4.2 Flexión pura recta

4.2.1 Flexión pura en piezas de plano medio

Consideremos una viga recta, de sección constante y con un plano de simetría longitudinal, sometida a flexión pura según dicho plano. Llamaremos xy al plano de solicitación, que, en este caso, coincide con el plano medio (de simetría); por tanto, el momento flector actuante sólo tiene componente M_z (Figura 4.3a)

Al estar en flexión pura, el momento flector será constante a lo largo de la pieza y, por tanto, la deformación producida por éste será la misma en todas las rebanadas de la viga. En consecuencia, la directriz de la viga se deformará en una curva de curvatura constante, es decir, en un arco de circunferencia de centro O, contenido en el plano de simetría de la pieza, tal como se muestra en la Figura 4.4a.

Consideremos ahora una sección recta S cualquiera de la pieza sometida a flexión pura, contenida en el plano mm', que divide a la pieza en dos partes (A) y (B). Podemos imaginar que dicha sección se transforma en la sección S', al deformarse la parte (A). Análogamente, la sección S se transforma en S'', al deformarse la parte (B). Por simetría de la geometría y de la solicitación, las secciones deformadas S' y S'' deben ser simétricas con respecto al plano mm'. Además, por continuidad de la pieza y del proceso de deformación, las secciones deformadas S' y S'' deben ser superponibles, tal como se muestra en la Figura 4.4b. Por tanto, la sección S debe permanecer plana al deformarse la pieza. Además, dada la simetría del problema respecto al punto O, este plano debe pasar por el centro de curvatura de la directriz. En consecuencia,

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

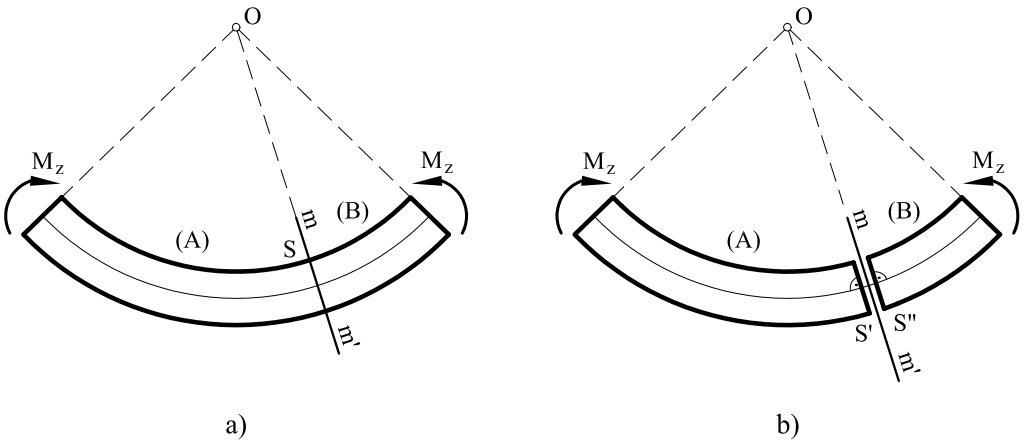

Fig. 4.4: Deformada de la directriz y de las secciones rectas en flexión pura recta

"en la deformación de una pieza recta sometida a flexión pura, *las secciones rectas permanecen planas y normales a la deformada de la directriz*".

Esta es la hipótesis de deformación de Bernouilli-Navier, en la que se basa el estudio de este tipo de solicitación. Aunque ha sido introducida aquí basándonos en razonamientos de tipo exclusivamente geométricos, aplicables únicamente al caso sencillo que nos ocupa, su validez puede ser comprobada experimentalmente en situaciones más generales.

Según la hipótesis de deformación, las fibras longitudinales que forman la rebanada se curvan transformándose en arcos de circunferencia concéntricos con la deformada de la directriz de la pieza, tal como se muestra en la Figura 4.5b. En este proceso de deformación, las fibras pueden aumentar o disminuir su longitud. En el primer caso, estarán sometidas a deformación y tensión longitudinal de tracción, y de compresión en el segundo. Al ser el esfuerzo axil sobre la sección nulo, debe cumplirse que:

$$N = \int_S \sigma_x \, dS = 0 \tag{4.2}$$

Por tanto, una parte de las fibras estarán sometidas a tracción, con tensiones longitudinales positivas ($\sigma_x > 0$) y otra a compresión, con tensiones longitudinales negativas ($\sigma_x < 0$). Por continuidad de la deformación, existirá una línea que dividirá la sección en una parte traccionada y otra comprimida, y en la que la tensión longitudinal será nula ($\sigma_x = 0$). Al ser la deformación plana esta "línea neutra" será una recta, y por simetría del problema respecto del plano medio, será una recta perpendicular a dicho plano de simetría. A esta recta, contenida en el plano de la sección y perpendicular al plano de simetría, se le llama *eje neutro*.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

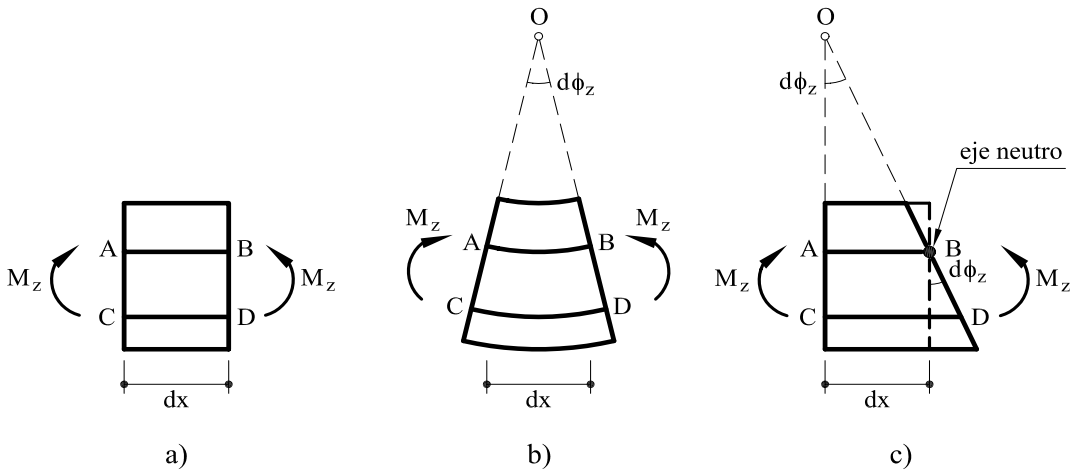

Fig. 4.5: Deformación de la rebanada en flexión recta

En consecuencia, para casos de flexión pura en piezas rectas de plano medio, la hipótesis de Bernoulli-Navier implica que cada sección gira con relación a una sección próxima alrededor de un eje llamado *eje neutro*, manteniéndose plana en la deformación, y de manera que el plano de la sección pasa por el centro de curvatura de la deformada de la directriz.

Dado que está implícito en todo este desarrollo que se cumple la hipótesis de pequeños movimientos, el giro de flexión que se produce en cada rebanada, $d\phi_z$, es pequeño y, por tanto, se pueden identificar los arcos comprendidos por éste con sus respectivas tangentes. Por consiguiente, puede identificarse la deformación de la rebanada diferencial representada en la Figura 4.4b con la correspondiente linearización, tal como se indica en la Figura 4.5c.

Analicemos ahora, en detalle, la deformación de una rebanada de longitud diferencial dx, que se produce tal como se muestra en la Figura 4.6. En la sección hemos tomado el eje y según el plano de simetría (eje principal de inercia de la sección), y el eje z, perpendicular al anterior, coincidente con el eje neutro nn', de posición por ahora desconocida. De la semejanza de los triángulos OAB y BED se deduce:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BE}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{\rho_z} = \frac{\epsilon_x\, dx}{-y} \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon_x = -\frac{y}{\rho_z} \tag{4.3}$$

donde ρ_z denota el radio de curvatura de las fibras situadas sobre el eje neutro, como por ejemplo la fibra AB, la coordenada y mide la distancia de una fibra genérica, como por ejemplo la fibra CD, al eje neutro y ϵ_x representa la deformación longitudinal de una

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

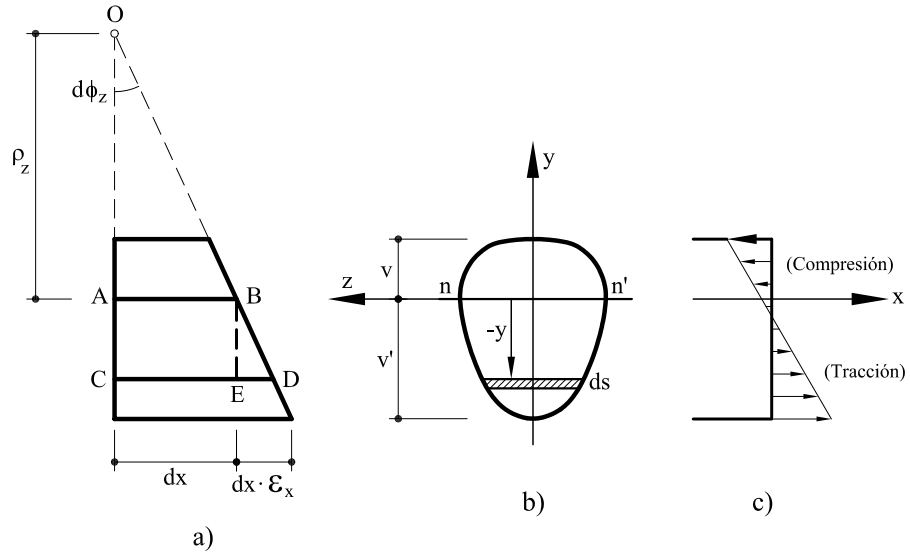

Fig. 4.6: Elongaciones de las fibras y distribución de tensiones

de estas fibras. Se observa que los alargamientos ϵ_x de las fibras son proporcionales a la distancia de éstas al eje neutro, y; lo mismo puede decirse de las tensiones, ya que según la ley de Hooke (y considerando que las tensiones normales a planos perpendiculares al de la sección son despreciables frente a las tensiones normales, esto es, $\sigma_y, \sigma_z << \sigma_x$):

$$\sigma_x = E\,\epsilon_x = -\frac{E\,y}{\rho_z} \tag{4.4}$$

Por tanto, la distribución de tensiones es lineal, estando sometidos a la misma tensión todos los puntos situados sobre rectas paralelas al eje neutro nn', y será nula para los puntos situados sobre dicho eje neutro, tal como se muestra en la Figuras 4.6 y 4.7.

Integrando esta distribución de tensiones y considerando que el esfuerzo axil sobre la sección es nulo se tiene:

$$N = \int_S \sigma_x\,dS = -\frac{E}{\rho_z}\int_S y\,dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_S y\,dS = 0 \tag{4.5}$$

La integral que debe anularse es el momento estático de la sección respecto al eje neutro. Por tanto, el eje neutro debe pasar por el centro de gravedad de la sección G y coincide *necesariamente* con el segundo eje principal de inercia de la sección (eje z). Por este motivo y por simetría respecto al plano medio, se cumple idénticamente que:

$$M_y = \int_S \sigma_x\,z\,dS = -\frac{E}{\rho_z}\int_S y\,z\,dS \equiv 0 \tag{4.6}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

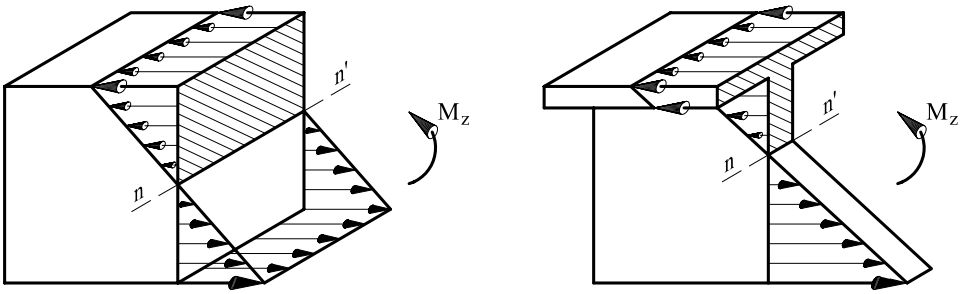

Fig. 4.7: Distribución de tensiones en flexión pura recta

Por otro lado, el momento resultante de las tensiones respecto al eje neutro debe ser igual al momento flector actuante:

$$M_z = -\int_S \sigma_x \, y \, dS = \frac{E}{\rho_z} \int_S y^2 \, dS = \frac{E \, I_z}{\rho_z} \tag{4.7}$$

siendo $I_z = \int_S y^2 \, dS$ el momento de inercia de la sección respecto al eje z. Por tanto:

$$\frac{1}{\rho_z} = \frac{M_z}{EI_z} \tag{4.8}$$

La expresión obtenida indica que la curvatura, $\chi_z = 1/\rho_z$, varía proporcionalmente al momento flector actuante M_z, y de forma inversamente proporcional al producto EI_z, llamado rigidez a flexión de la sección. Se observa también en la expresión anterior que, por definición de curvatura $\chi_z = 1/\rho_z = d\phi_z/dx$ (ver Figura 4.6a), se tiene:

$$d\phi_z = \frac{dx}{\rho_z} = \frac{M_z}{EI_z} \, dx \tag{4.9}$$

donde $d\phi_z$ es el ángulo relativo girado por dos secciones que delimitan una rebanada diferencial. El giro relativo total entre las dos secciones extremas de la pieza se obtiene integrando el giro relativo a lo largo de toda la pieza, es decir:

$$\Delta\phi_z = \int_l d\phi_z = \int_l \chi_z \, dx = \int_0^l \frac{M_z}{EI_z \, (x)} \, dx \tag{4.10}$$

donde l es la longitud total de la pieza. Si la viga es de sección constante, la rotación total $\Delta\phi_z$ de una de las secciones extremas respecto a la otra será igual a:

$$\Delta\phi_z = \frac{M_z \, l}{E \, I_z} \tag{4.11}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Finalmente, eliminando el radio de curvatura ρ_z de las ecuaciones 4.4 y 4.7 se obtiene:

$$\sigma_x = -\frac{M_z\, y}{I_z} \tag{4.12}$$

expresión conocida como *ley de Navier*, que permite calcular la tensión normal en un punto de la sección, conocida su distancia al eje neutro, y que pone nuevamente de manifiesto la distribución lineal de las tensiones normales de flexión. Es obvio que las tensiones máximas se darán en los puntos de la sección más alejados del eje neutro y que la tensión máxima de compresión no es igual a la tensión máxima de tracción, salvo que las distancias de las respectivas fibras extremas al centro de gravedad sean iguales (ver, por ejemplo, los casos mostrados en la Figura 4.7). Asimismo, debe hacerse notar que la hipótesis de distribución lineal de las deformaciones de las fibras, y la correspondiente de distribución lineal de las tensiones normales, son exactas cuando los momentos exteriores están aplicados precisamente en esa forma sobre las secciones correspondientes. En el caso de no serlo, según el Principio de Saint-Venant, los resultados obtenidos son válidos para secciones suficientemente alejadas de las secciones donde se aplican los momentos. La distancia a la que se verifica esta hipótesis es aproximadamente igual a las dimensiones transversales de la pieza.

Al mantenerse las secciones rectas normales a las fibras longitudinales, los elementos diferenciales no sufren distorsión angular, es decir, los ángulos rectos permanecen rectos. Por tanto, las distorsiones γ_{xz} y γ_{yz} son nulas en todo punto (ver Figura 4.8) y, en virtud de la ley de Hooke, las tensiones tangenciales correspondientes también son nulas, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Por tanto, las ecuaciones:

$$T_y = \int_S \tau_{xy}\, dS \equiv 0 \quad ; \quad T_z = \int_S \tau_{xz}\, dS \equiv 0 \quad ; \quad M_t = \int_S (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z)\, dS \equiv 0 \tag{4.13}$$

se cumplen idénticamente.

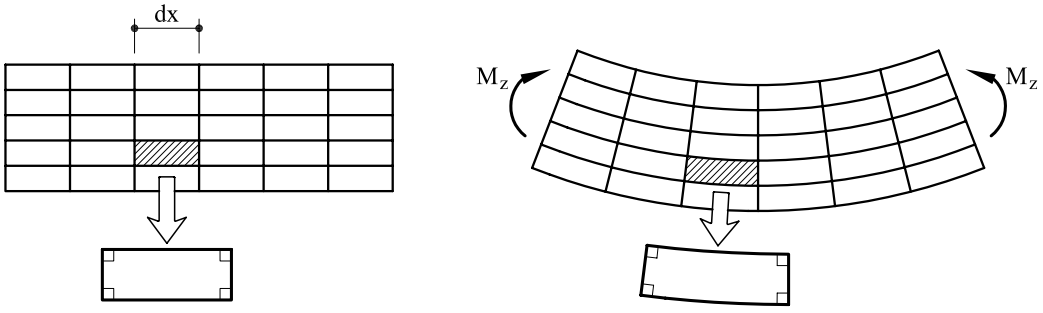

Fig. 4.8: Ausencia de distorsiones angulares en la deformación por flexión pura

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

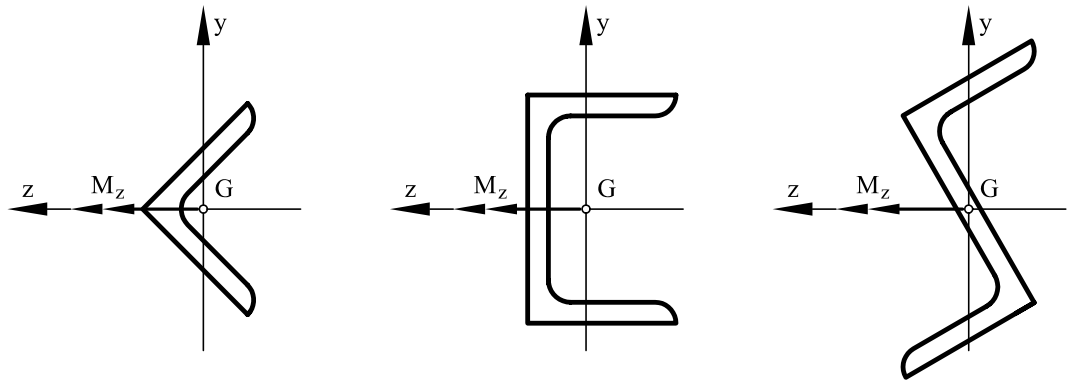

Fig. 4.9: Flexión recta alrededor de un plano principal de inercia

4.2.2 Flexión pura según un plano principal de inercia

El desarrollo de la sección anterior se establece suponiendo que la viga tiene un plano longitudinal de simetría en el que actúan los momentos extremos. Esta simetría permite afirmar que el momento resultante de las tensiones normales σ_x respecto al eje y se anula idénticamente (ver ecuación (4.6)).

Supongamos ahora que la pieza está solicitada a flexión pura por un par de momentos M_z contenidos en el plano formado por los ejes x e y, *pero que éste no es un plano de simetría longitudinal* de la pieza. Suponiendo que también para este caso sea válida la hipótesis de Bernoulli-Navier y que se cumpla la ley de Hooke, las tensiones estarán dadas por la ecuación (4.4). Entonces, la relación entre esfuerzos y tensiones sobre la sección exige que sea

$$M_y = \int_S \sigma_x \, z \, dS = -\frac{E}{\rho_z} \int_S y \, z \, dS = 0 \tag{4.14}$$

Esta condición implica que

$$I_{yz} = \int_S y \, z \, dS = 0 \tag{4.15}$$

es decir, este momento será nulo si los ejes (y, z) son los *ejes principales de inercia de la sección.* Por tanto, la teoría de flexión desarrollada en la sección anterior para secciones de plano medio será también válida en secciones sin plano de simetría, siempre que el momento flector actúe en un plano que contenga a uno de los ejes principales de inercia, es decir, siempre que el plano de solicitación coincida con uno de los llamados *planos principales de flexión.* Este resultado fue obtenido por primera vez por Persy y citado por Saint-Venant en 1864.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

La teoría de flexión pura estudiada hasta aquí se caracteriza por el hecho de que *el plano en el que se produce la deformación por flexión coincide con el plano de actuación del momento, y el eje neutro es normal a este plano.* Por este motivo recibe el nombre de *flexión pura recta* o *flexión de Navier*, en homenaje al ingeniero Louis Navier (1785-1836) que la estableció. Dado que toda sección tiene al menos dos planos principales de inercia, es siempre posible solicitar una pieza a flexión recta. En la Figura 4.9 se muestran casos de flexión recta sobre secciones de varias geometrías.

Asimismo, debe hacerse notar que debido al efecto de Poisson, además de las deformaciones longitudinales ϵ_x se producen otras deformaciones transversales de valor $\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x$, estrechándose transversalmente la parte de la pieza en que las fibras están longitudinalmente traccionadas y ensanchándose transversalmente la parte comprimida longitudinalmente, al tiempo que se curvan las líneas paralelas al eje neutro. A esta curvatura transversal se le llama *anticlástica,* y está definida en el eje neutro por el valor $\bar{\chi} = -\nu\chi$, o bien, por el radio de curvatura del eje neutro $\bar{\rho} = -\rho/\nu$, donde χ y ρ son la curvatura y radio de curvatura longitudinales (ver Figura 4.10).

Debe señalarse, finalmente, que la hipótesis de que las secciones rectas permanecen planas después de la deformación y normales a la deformada de la directriz es puramente geométrica, es decir, que no establece ninguna condición con respecto al comportamiento del material. Por tanto, la hipótesis de Bernoulli-Navier puede extenderse a los casos en que el material no sea homogéneo, ni isótropo, ni elástico. Sin

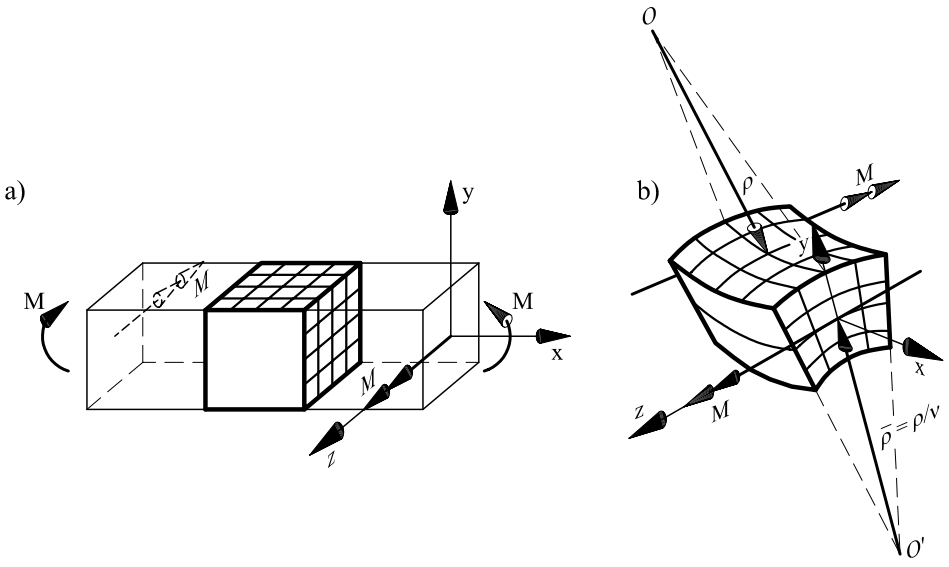

Fig. 4.10: Curvatura transversal o anticlástica

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

embargo, para obtener la ley de tensiones se ha supuesto que la pieza es homogénea y que el material es isótropo y elástico lineal. En caso contrario, la ley de tensiones no vendrá dada por la ley de Navier.

4.2.3 Momentos máximos admisibles

Como en una sección sometida a flexión pura la ley de tensiones es lineal, los valores máximos de tensión se dan necesariamente en las fibras más alejados del eje neutro. Llamaremos v y v' a las distancias de las fibras superior e inferior de la sección al eje z, y w y w' a las distancias de las fibras extremas a izquierda y derecha del eje y, respectivamente (ver Figura 4.11a y b). Sea, además, σ^* el valor absoluto de la máxima tensión admisible del material. Supondremos primero que esta tensión es igual a tracción que a compresión.

El máximo momento $M_z^{\max}$ que puede soportar la sección solicitada a flexión pura según el eje principal de inercia z, es aquel que produce, según la ley de Navier, una tensión igual a σ^* en la fibra superior o en la fibra inferior. Es, por tanto:

$$M_z^{\max} = \frac{\sigma^* I_z}{\max(v, v')} = \min\left(\frac{\sigma^* I_z}{v}, \frac{\sigma^* I_z}{v'}\right) \tag{4.16}$$

Análogamente, se podrá definir el máximo momento $M_y^{\max}$ que puede resistir la sección solicitada a flexión pura según el eje principal de inercia y, como

$$M_y^{\max} = \frac{\sigma^* I_y}{\max(w, w')} = \min\left(\frac{\sigma^* I_y}{w}, \frac{\sigma^* I_z}{w'}\right) \tag{4.17}$$

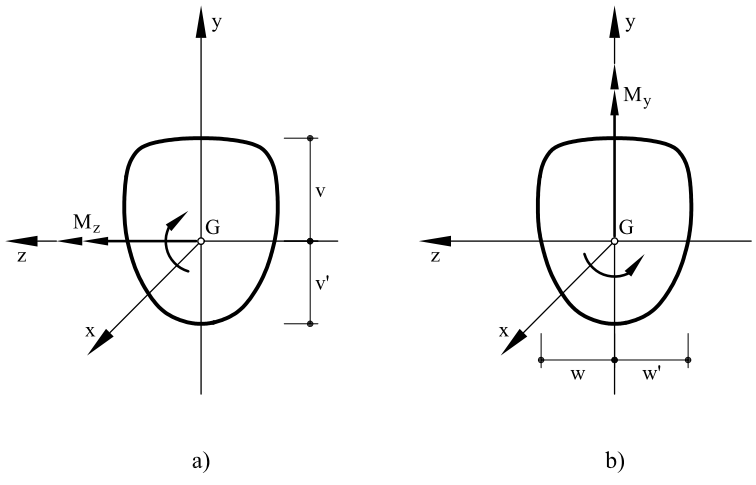

Fig. 4.11: Localización de elas fibras extremas en flexión recta

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Estas definiciones pueden generalizarse al caso en que el material tenga diferente tensión máxima admisible a tracción σ_t^* que a compresión σ_c^*. En este caso, cabe distinguir entre los momentos máximos positivos (tracción en fibras v' y w, compresión en fibras v y w', respectivamente), que serán:

$$(M_z^{\max})^+ = \min\left(\frac{\sigma_c^* I_z}{v}, \frac{\sigma_t^* I_z}{v'}\right) \qquad ; \qquad \left(M_y^{\max}\right)^+ = \min\left(\frac{\sigma_c^* I_y}{w'}, \frac{\sigma_t^* I_y}{w}\right) \tag{4.18}$$

y los momentos máximos negativos (tracción en fibras v y w', compresión en fibras v' y w, respectivamente), que serán (en valor absoluto):

$$(M_z^{\max})^- = \min\left(\frac{\sigma_c^* I_z}{v'}, \frac{\sigma_t^* I_z}{v}\right) \qquad ; \qquad \left(M_y^{\max}\right)^- = \min\left(\frac{\sigma_c^* I_y}{w}, \frac{\sigma_t^* I_y}{w'}\right) \tag{4.19}$$

4.2.4 Módulos resistentes

Supongamos que la sección está solicitada a flexión recta por un momento M_z contenido en el plano xy, y sea σ^* la tensión máxima admisible del material, igual a tracción que a compresión. Debe cumplirse que:

$$\sigma^* \geq \frac{M_z\,|y|_{\max}}{I_z} = \frac{M_z}{W_z} \qquad \text{con} \qquad W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}} = \frac{I_z}{\max(v, v')} \tag{4.20}$$

A la relación W_z se le denomina *módulo resistente de la sección respecto al eje z* y sus dimensiones son $[L^3]$.

Al dimensionar una viga solicitada por un momento M_z, elegiremos una sección de módulo resistente tal que cumpla:

$$W_z \geq \frac{M_z}{\sigma^*} \tag{4.21}$$

Obviamente, se puede definir el módulo resistente para cada eje principal de flexión, como características geométricas de la sección.

4.2.5 Rendimiento geométrico

Puesto que, según la ley de Navier, las tensiones máximas se producen en los puntos más alejados del eje neutro y éstas no deben sobrepasar el valor de la tensión admisible σ^*, resulta que en los otros puntos de la sección se tienen tensiones de valor inferior a la admisible, es decir, que el material no está totalmente aprovechado.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

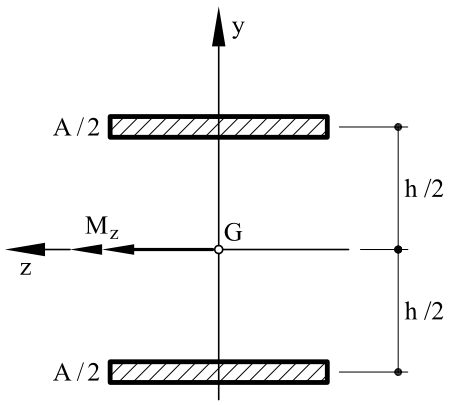

Fig. 4.12: Sección "ideal" a flexión recta

La forma ideal de una sección que trabaje a flexión pura será, por tanto, aquella que tenga el material dispuesto a la mayor distancia posible del eje neutro. La sección óptima, para un área A y un canto h dados, será aquella que presente un mayor módulo de resistencia respecto al eje de flexión. El valor máximo del módulo resistente corresponde a una sección ideal simétrica con todo el material concentrado en las fibras extremas, a distancia $h/2$ del centro de gravedad. En este caso, el valor del módulo resistente será (suponiendo, por ejemplo, flexión alrededor del eje z):

$$\begin{aligned} W_z^{\text{opt}} &= \frac{I_z}{|y|_{\max}} \\ &= \frac{2\frac{A}{2}(\frac{h}{2})^2}{\frac{h}{2}} = \frac{Ah}{2} \end{aligned} \tag{4.22}$$

donde h es el canto de la pieza, o sea la distancia entre las fibras extremas. Para una sección *real* de forma arbitraria, de área A y canto h, se podrá escribir:

$$W_z = \eta_z \, W_z^{\text{opt}} = \eta_z \frac{Ah}{2} \qquad \text{con} \qquad 0 \leq \eta_z \leq 1 \tag{4.23}$$

donde η_z es un coeficiente adimensional que se llama *rendimiento geométrico de la sección respecto al eje z.*

Obviamente, se pueden definir los rendimientos geométricos para cada eje principal de flexión, como características geométricas de la sección.

El rendimiento geométrico es siempre menor que la unidad, y el material de la pieza está mejor aprovechado cuanto mayor sea el valor de η para el eje de flexión.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

El valor del rendimiento geométrico de algunas de las secciones más usuales es el siguiente:

$\eta \simeq \frac{2}{3}$ para perfiles estándar de acero laminado en doble T,

$\eta \simeq \frac{3}{5}$ para perfiles estándar de acero laminado en U y carriles de ferrocarril,

$\eta \simeq \frac{1}{2}$ para anillos circulares delgados,

$\eta = \frac{1}{3}$ para secciones rectangulares macizas,

$\eta = \frac{1}{4}$ para secciones circulares,

$\eta = \frac{1}{6}$ para secciones romboidales.

Ejemplo 4.2.1

Una viga recta, de sección normal en T, trabaja a flexión pura de tal forma que en la fibra superior se produce una tensión de compresión $\sigma^c_{\max} = 100\,\text{MPa}$, y en la fibra inferior una tensión de tracción de $\sigma^t_{\max} = 50\,\text{MPa}$. Determinar: (a) la situación del eje neutro, (b) la anchura b de la viga, (c) el momento flector que solicita a la viga y (d) el máximo momento admisible si la tensión máxima admisible del material es $\sigma^* = 250$ MPa.

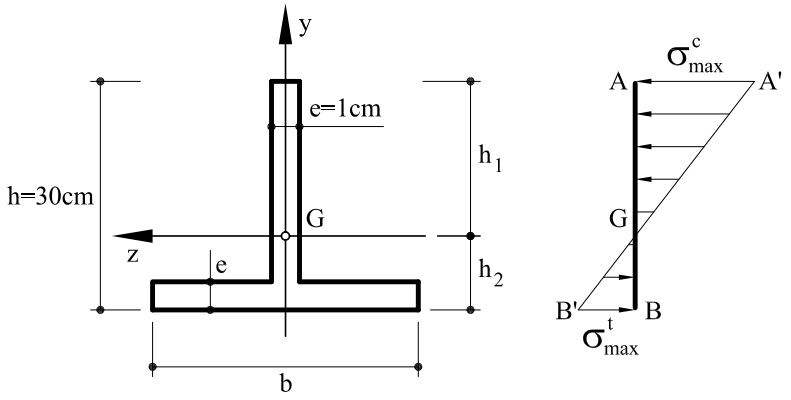

Fig. 4.13: Sección del Ejemplo 4.2.1

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

(a) Como la variación de tensiones a lo largo de la altura de la viga es lineal, la posición del eje neutro se obtiene directamente a partir de las tensiones extremas. De la semejanza de triángulos GAA' y GBB', se tiene:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sigma^c_{\max}}{\sigma^t_{\max}} = \frac{100}{50} = 2$$

luego, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} h_1 + h_2 &=& 30 \\ \dfrac{h_1}{h_2} &=& 2 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} h_1 = 20\,\mathrm{cm} \\ h_2 = 10\,\mathrm{cm} \end{array} \right.$$

(b) El eje neutro debe pasar por el centro de gravedad de la sección, por tanto, el momento estático de ésta respecto al eje z debe ser nulo. Calculemos primero los momentos estáticos del alma y del ala por separado:

$$\begin{array}{rcl} \text{alma}: \ m^e_{\text{alma}} &=& e\,[h_1 + (h_2 - e)] \left[\dfrac{1}{2}\,(h_1 + (h_2 - e)) - (h_2 - e)\right] \\ &=& \dfrac{e}{2}\left[h_1^2 - (h_2 - e)^2\right] \\ \text{ala}: m^e_{\text{ala}} &=& -e\,b\,(h_2 - \dfrac{e}{2}) \end{array}$$

y, sumando ambos momentos estáticos:

$$m^e_{\text{alma}} + m^e_{\text{ala}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{e}{2}\left[h_1^2 - (h_2 - e)^2\right] - eb\,(h_2 - \frac{e}{2}) = 0$$

de donde:

$$b = \frac{h_1^2 - (h_2 - e)^2}{2(h_2 - \frac{e}{2})} = 16,79\,\mathrm{cm}$$

(c) El momento flector exterior es igual al momento resultante de las tensiones normales respecto al eje neutro. Llamaremos M_{alma} y M_{ala} a los momentos de las tensiones que actúan sobre el alma y el ala, respectivamente:

$$\begin{array}{rcl} \text{alma} \ : \ M_{\text{alma}} &=& \left[\dfrac{1}{2}\sigma^c_{\max}\,(h_1 e)\right]\dfrac{2}{3}h_1 + \left[\dfrac{1}{2}\left(\sigma^t_{\max}\,\dfrac{h_2 - e}{h_2}\right)(h_2 - e)e\right]\dfrac{2}{3}(h_2 - e) \\ \text{ala} \ : \ M_{\text{ala}} &=& \left[\dfrac{1}{2}\sigma^t_{\max}\,(h_2 b)\right]\dfrac{2}{3}h_2 - \left[\dfrac{1}{2}\left(\sigma^t_{\max}\,\dfrac{h_2 - e}{h_2}\right)(h_2 - e)b\right]\dfrac{2}{3}(h_2 - e) \end{array}$$

Sustituyendo valores, se obtiene $M_{\text{alma}} = 14,548\,\mathrm{kN{\cdot}m}$ y $M_{\text{ala}} = 7,584$ kN·m. Sumando ambos valores, se obtiene el momento flector que actúa sobre la sección:

$$M_z = M_{\text{alma}} + M_{\text{ala}} = 22,132\,\mathrm{kN \cdot m}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Alternativamente, se puede obtener M_z de aplicar la ley de Navier a cualquiera de los puntos de la sección en los que se conoce la tensión. Para ello, es preciso calcular primero el momento de inercia de la sección respecto del eje z

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{1}{12}\left[h_1+(h_2-e)\right]^3 e + \\ &\quad +\left[h_1+(h_2-e)\right]\, e\left[\frac{1}{2}\left(h_1+(h_2-e)\right)-(h_2-e)\right]^2 + \\ &\quad +\frac{1}{12}b^3e+be\,(h_2-\frac{e}{2})^2 \\ &= 4.426,37\ \mathrm{cm}^4 \end{aligned}$$

Aplicando ahora la ley de Navier, por ejemplo, a las fibras superiores, donde se da la máxima compresión:

$$\sigma^c_{\max} = -\frac{M_z\, h_1}{I_z} \quad \Longrightarrow \quad M_z = 22,132\,\mathrm{kN.m}$$

(d) El máximo momento admisible será el que hace que se alcance σ^* en la fibra superior, ya que $h_1 = \max\,(v,\, v')$

$$M_z^{\max} = \min\left(\frac{\sigma^* I_z}{h_1}, \frac{\sigma^* I_z}{h_2}\right) = \frac{\sigma^* I_z}{h_1} = 55,329\,\mathrm{kN.m}$$

Ejemplo 4.2.2

Calcular el máximo momento flector que puede soportar una viga de sección rectangular de ancho b y altura h según sus dos ejes principales de inercia, si la tensión admisible del material es σ^*.

(a) El momento máximo admisible $M_z^{\max}$ actuando en el plano xy es el que produce una tensión igual a σ^* en las fibras extremas ($y = \pm\, h/2$). O sea:

$$\sigma^* = \frac{M_z^{\max}\frac{h}{2}}{I_z} = \frac{M_z^{\max}\,\frac{h}{2}}{\frac{1}{12}bh^3}$$

Por tanto:

$$M_z^{\max} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{\frac{h}{2}}\sigma^* = \left(\frac{1}{6}bh^2\right)\sigma^* = W_z\,\sigma^*$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

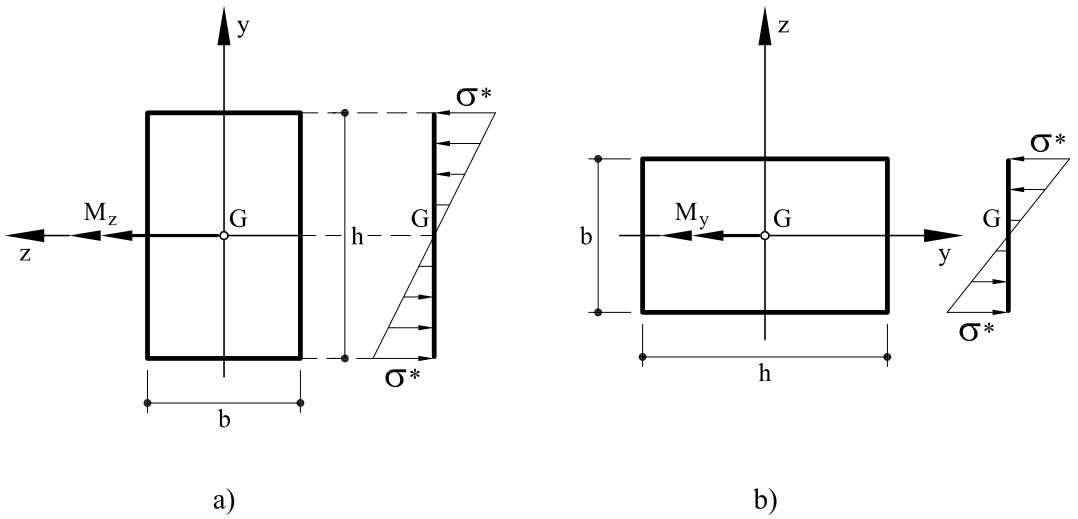

Fig. 4.14: Ejemplo 4.2.2: sección rectangular trabajando a flexión recta

Obsérvese que se tiene $W_z = (1/6)\, bh^2 = (1/3)(Ah/2)$ y, por tanto, $\eta_z = 1/3$.

(b) El máximo momento admisible $M_y^{\max}$ actuando en el plano xz se obtiene análogamente sólo con intercambiar adecuadamente las dimensiones b y h. Así:

$$M_y^{\max} = \frac{\frac{1}{12}hb^3}{\frac{b}{2}}\sigma^* = \left(\frac{1}{6}hb^2\right)\sigma^* = W_y\,\sigma^*$$

Obsérvese que se tiene $W_y = (1/6)\, hb^2 = (1/3)(Ab/2)$ y, por tanto, $\eta_y = 1/3$. Por tanto, la relación entre los dos momentos máximos es:

$$\frac{M_z^{\max}}{M_y^{\max}} = \frac{\left(\frac{1}{6}bh^2\right)\sigma^*}{\left(\frac{1}{6}hb^2\right)\sigma^*} = \frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b}$$

Ejemplo 4.2.3

Hallar los módulos resistentes W_y, W_z y los rendimientos geométricos η_y, η_z del perfil de la Figura 4.15.

El área del perfil es igual a:

$$A = 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 12 \cdot 2 = 41\,\mathrm{cm}^2$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

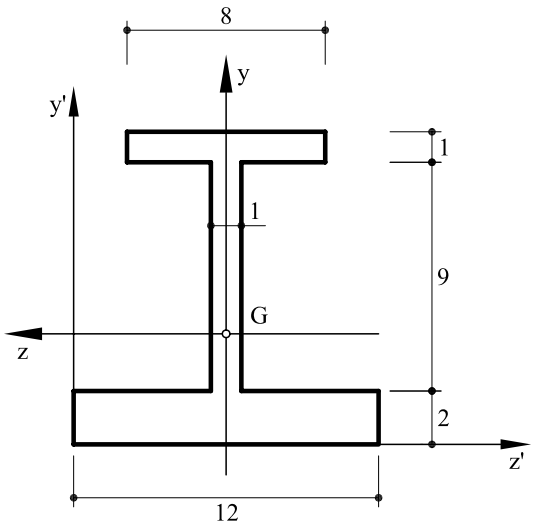

Fig. 4.15: Sección del Ejercicio 4.2.3

La posición del centro de gravedad queda determinada por:

$$\begin{aligned} y'_G &= \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{1}{41}(8 \cdot 11,5 + 9 \cdot 6,5 + 24 \cdot 1) = 4,25 \text{ cm} \\ z'_G &= 6,0 \text{ cm} \qquad \text{(en el eje de simetría)} \end{aligned}$$

Los momentos de inercia de la sección con respecto a los ejes (y, z) son:

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{1}{12}1 \cdot 8^3 + \frac{1}{12}9 \cdot 1^3 + \frac{1}{12}2 \cdot 12^3 \\ &= 331,42 \text{ m}^4 \\ I_z &= \frac{1}{12}8 \cdot 1^3 + \frac{1}{12}1 \cdot 9^3 + \frac{1}{12}12 \cdot 2^3 \\ &\qquad + 1 \cdot 8 \cdot (7,25)^2 + 1 \cdot 9 \cdot (2,25)^2 + 2 \cdot 12 \cdot (3,25)^2 \\ &= 788,98 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Luego, los módulos resistentes y los rendimientos geométricos respecto a los ejes $(y,\ z)$ son iguales a:

$$W_y = \frac{I_y}{|z|_{\max}} = \frac{331,42}{6} = 55,24 \text{ cm}^3 \quad ; \quad \eta_y = \frac{W_y}{A\frac{b}{2}} = \frac{55,24}{41 \cdot 6} = 0,225$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}} = \frac{788,98}{7,75} = 101,80 \text{ cm}^3 \quad ; \quad \eta_z = \frac{W_z}{A\frac{h}{2}} = \frac{101,80}{41 \cdot 6} = 0,414$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ejemplo 4.2.4

Justificar cuál de las dos posiciones de la pieza de sección cuadrada de lado a mostradas en la Figura 4.16 es la más adecuada para trabajar a flexión en el plano vertical.

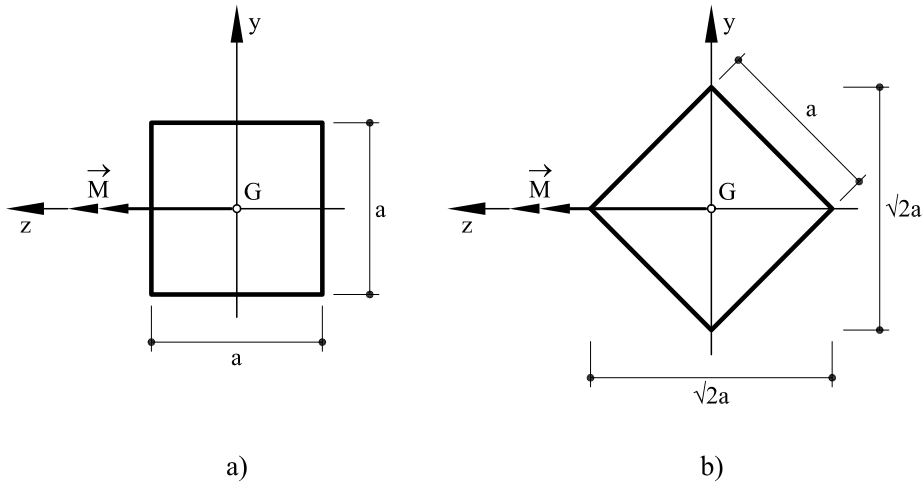

Fig. 4.16: Secciones cuadradas del Ejemplo 4.2.4

El momento de inercia de una sección cuadrada es el mismo respecto de cualquier eje que pasa por el centro de gravedad, y vale

$$I = \frac{a^4}{12}$$

La sección más adecuada para trabajar a flexión será aquella que tenga mayor módulo resistente. Así, para la sección en la posición (a):

$$W_a = \frac{I}{a/2} = \frac{a^3}{6}$$

mientras que para la posición (b) se tiene:

$$W_b = \frac{I}{\sqrt{2}a/2} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$$

Dado que el momento máximo admisible es $M^{\max} = W\sigma^*$ para una tensión admisible de σ^*, la sección de la posición (a) puede soportar un momento $\sqrt{2}$ veces mayor que en la posición (b).

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ejemplo 4.2.5

Determinar los módulos resistentes de dos piezas rectangulares de sección $h \times b$ colocadas de forma superpuesta (canto total de $2h$), según trabajen de forma solidaria o independiente.

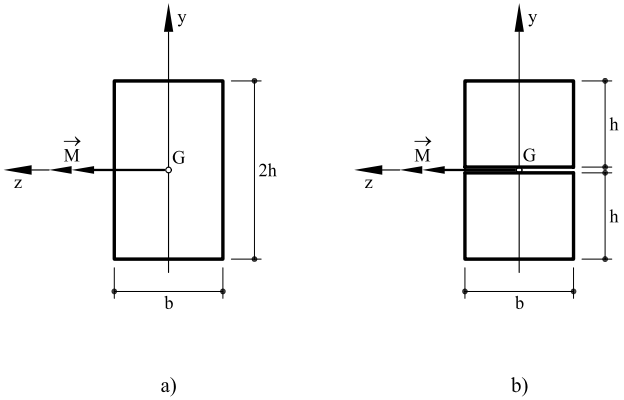

Fig. 4.17: Secciones rectangulares del Ejemplo 4.2.5

(a) Para las dos vigas trabajando de forma solidaria el momento máximo es aquel que produce tensiones iguales a la tensión admisible σ^* en las fibras extremas de la viga compuesta (ver Figura 4.18a), es decir:

$$M_a^{\max} = 2 \cdot \frac{1}{2}\sigma^* hb \cdot \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}bh^2\ \sigma^*$$

o sea, que el módulo resistente es:

$$W_a = \frac{M_a^{\max}}{\sigma^*} = \frac{2}{3}bh^2$$

(b) Para las dos vigas superpuestas trabajando de forma independiente el momento máximo es el doble de aquel que produce tensiones iguales a σ^* en las fibras extremas de cada una de las vigas (ver Figura 4.18b), es decir:

$$M_b^{\max} = 2\left[2 \cdot \frac{1}{2}\sigma^* \frac{h}{2} b \cdot \frac{2}{3}\frac{h}{2}\right] = \frac{1}{3}bh^2\ \sigma^*$$

o sea , que el módulo resistente es:

$$W_b = \frac{M_b^{\max}}{\sigma^*} = \frac{1}{3}bh^2$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

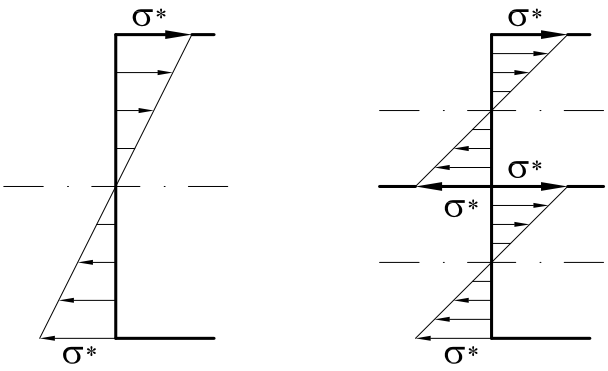

Fig. 4.18: Distribución de tensiones en Ejemplo 4.2.5

que es el doble del módulo resistente de las vigas individuales, pero la mitad del módulo resistente de la viga compuesta.

La forma distinta de deformarse a flexión pura de las dos vigas según trabajan de forma solidaria o superpuesta puede observarse en la Figura 4.19.

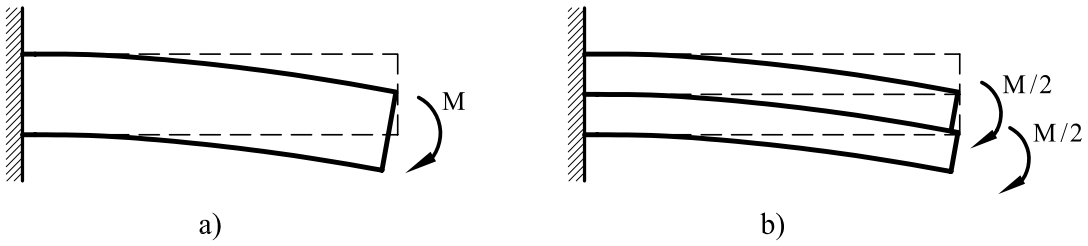

Fig. 4.19: Deformadas en Ejemplo 4.2.5

4.3 Flexión pura esviada

Se dice que una pieza está solicitada a *flexión pura esviada* cuando sobre sus secciones actúa un momento flector uniforme a lo largo de la misma, contenido en un plano distinto de los planos principales de flexión de la pieza, es decir, tal que el vector momento no coincide con ninguno de los ejes principales de inercia de las secciones, como se muestra en la Figura 4.20. Abordaremos en esta Sección el estudio de este tipo de solicitación, primero referido a los ejes principales de inercia de la sección, y luego directamente referida al eje neutro.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

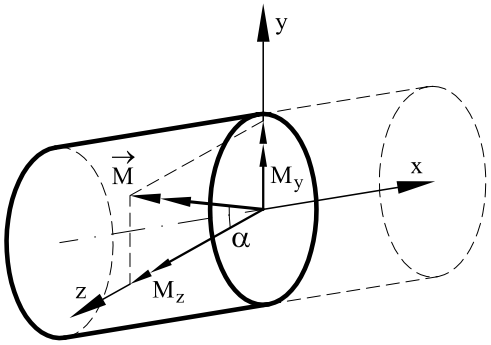

Fig. 4.20: Flexión esviada

4.3.1 Estudio en ejes principales

Supongamos una pieza recta sometida a flexión pura esviada por la acción de un par de momentos de módulo M aplicados en sus extremos y contenidos en un plano llamado *plano de carga* o *plano de solicitación*, de traza mm' sobre el plano de la sección (ver Figura 4.21a). Descomponiendo el vector momento flector $\overrightarrow{M}$ (perpendicular al plano de carga) en sus dos componentes según los ejes principales de inercia de la sección, se tienen las componentes del vector momento según dichos ejes: $M_z = M \cos \alpha$ y $M_y = M \sin \alpha$, donde α es el ángulo formado por el vector momento con el eje z (ver Figura 4.21b).

Se estudian, a continuación, los efectos que las componentes M_z y M_y producen por separado, para aplicar luego el principio de superposición.

La componente M_z actúa en el plano xy y produce sobre un punto de la sección de coordenadas (y, z) una tensión normal igual a (ver Ec. (4.12)):

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y \tag{4.24}$$

según los convenios de signos establecidos anteriormente para momentos y tensiones (es decir, momentos M_z positivos comprimen las fibras con coordenada $y > 0$).
Análogamente, la componente M_y actúa en el plano xz y produce sobre un punto de la sección de coordenadas (y, z), una tensión normal de valor:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z \tag{4.25}$$

(es decir, momentos M_y positivos traccionan las fibras con coordenada $z > 0$).

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

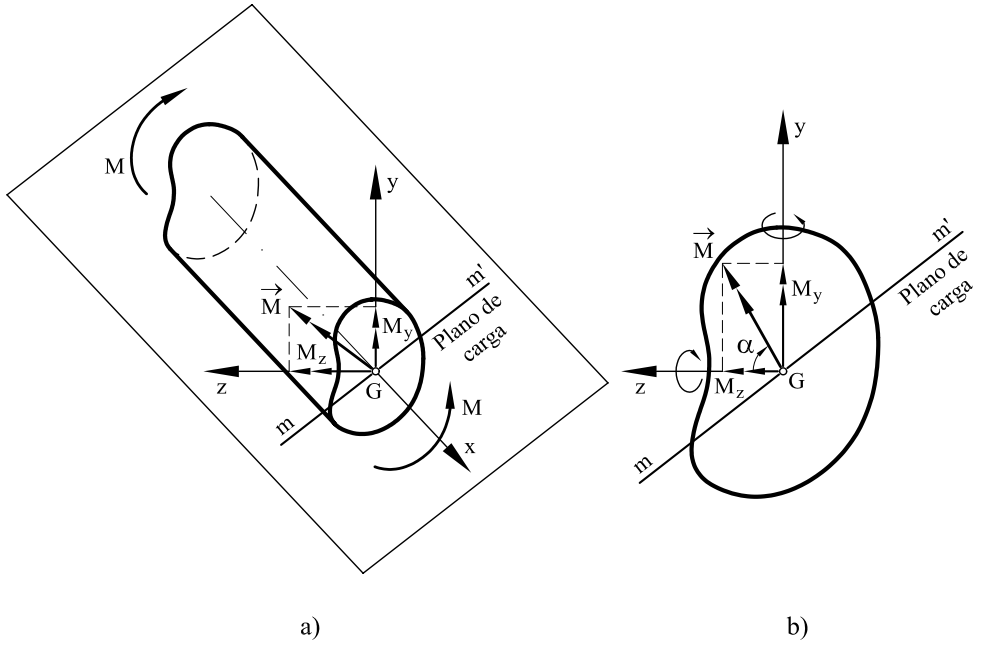

Fig. 4.21: Flexión esviada referida a ejes principales de la sección

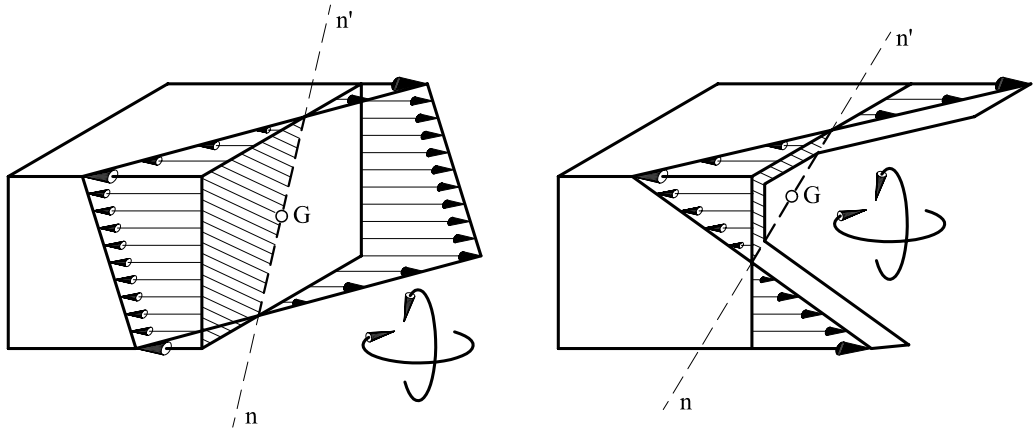

Fig. 4.22: Distribución de tensiones en flexión esviada

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Sumando los efectos de las dos componentes del momento flector $\vec{M}$ se obtiene:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z}\, y + \frac{M_y}{I_y}\, z \tag{4.26a}$$

$$= M\left(-\frac{\cos\alpha}{I_z}\, y + \frac{\sin\alpha}{I_y}\, z\right) \tag{4.26b}$$

Obsérvese que la distribución de tensiones obtenida es lineal en y, z. La distribución de tensiones será lineal y puede representarse como se muestra en la Figura 4.22.

La ecuación del eje neutro se obtiene como lugar geométrico de los puntos en los que la tensión normal es nula, es decir:

$$-\frac{M_z}{I_z}\, y + \frac{M_y}{I_y}\, z = 0 \qquad \text{o bien} \qquad -\frac{\cos\alpha}{I_z} y + \frac{\sin\alpha}{I_y} z = 0 \tag{4.27}$$

Esta es la ecuación de una recta que pasa por el centro de gravedad de la sección y tiene una pendiente:

$$\tan\beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\frac{I_z}{I_y} = \tan\alpha\,\frac{I_z}{I_y} \tag{4.28}$$

donde α y β son los ángulos formados por el vector $\overrightarrow{M}$ y el eje neutro con el eje z, respectivamente (ver Figura 4.23). Obsérvese que el eje neutro *no es normal*, en general, a la traza del plano de solicitación o plano de carga mm', ya que la recta normal al plano mm' tiene una pendiente, respecto al eje z, $\tan\alpha = y/z = M_y/M_z$, mientras que

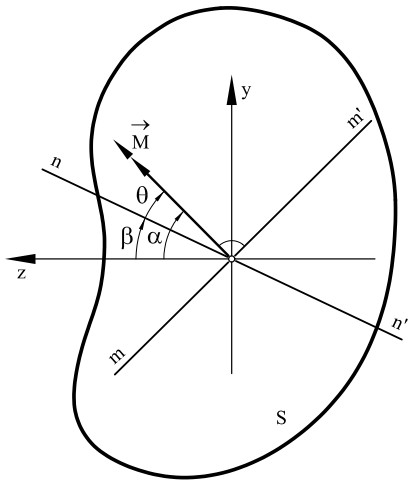

Fig. 4.23: Definición de ángulos en flexión esviada

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

el eje neutro tiene una pendiente $\tan\beta = y/z = (M_y/M_z)\,(I_z/I_y)$. Se llama ángulo de esviaje θ al ángulo que forma el vector momento respecto al eje neutro.

Los ángulos α y β sólo coinciden ($\theta = 0$) si:

1. Una de las componentes, M_y o M_z, es nula; es decir, si el momento actúa según un plano principal de inercia, o bien si

2. $I_z/I_y = 1$; es decir, cuando todas las direcciones son principales de inercia, y por lo tanto, también lo es la dirección mm'.

Este resultado fue obtenido por primera vez por Saint-Venant, que lo incluyó en la tercera edición del "Resumen de Lecciones de Resistencia de los Cuerpos Sólidos" de Navier (1864).

Saint-Venant señaló, asimismo, que existe una interesante relación geométrica entre la traza del plano de solicitación mm', que tiene por ecuación:

$$\frac{y}{z} = -\frac{M_z}{M_y} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y}{M_z} + \frac{z}{M_y} = 0 \tag{4.29}$$

el eje neutro nn', que tiene por ecuación:

$$\frac{y}{z} = \frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{y}{I_z/M_z} + \frac{z}{I_y/M_y} = 0 \tag{4.30}$$

y la elipse central de inercia de la sección que tiene por ecuación:

$$\frac{y^2}{r_z^2} + \frac{z^2}{r_y^2} = 1 \tag{4.31}$$

donde $r_z = \sqrt{I_z/A}$ y $r_y = \sqrt{I_y/A}$, semiejes de la elipse, son los radios de giro de la sección respecto a su ejes principales de inercia. En efecto, es fácil comprobar que *la dirección del eje neutro es la dirección conjugada de la traza del plano de solicitación respecto a la elipse central de inercia de la sección.*

Esta propiedad da pie a la construcción gráfica de la Figura 4.24 para hallar el eje neutro: basta trazar por el centro de gravedad de una sección una paralela a las tangentes a la elipse central de inercia en los puntos de intersección de ésta con la traza del plano de solicitación. Nótese una vez más que las direcciones nn' y mm' sólo son ortogonales si la recta mm' coincide con uno de los ejes principales de inercia de la sección, o bien, si la elipse central de inercia es una circunferencia.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

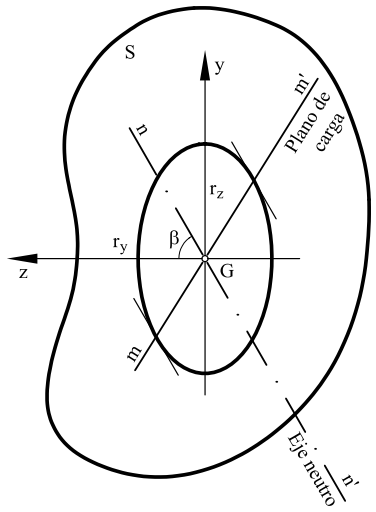

Fig. 4.24: Determinación gráfica del eje neutro en flexión esviada

4.3.2 Deformación en flexión pura esviada

Análogamente al estudio tensional, se puede estudiar la deformación de una viga recta sometida a flexión pura esviada descomponiendo el momento flector actuante en sus componentes según los ejes principales de inercia y aplicando el principio de superposición. Los diferenciales de los ángulos de flexión que sufre una rebanada diferencial de anchura dx, debidos a los momentos M_z y M_y, son, respectivamente:

$$d\phi_y = \frac{M_y}{EI_y}dx \qquad ; \qquad d\phi_z = \frac{M_z}{EI_y}dx \tag{4.32}$$

donde $d\phi_y$ es un giro diferencial contenido en el plano xz, y $d\phi_z$ es un giro diferencial contenido en el plano xy, tal como se muestra en la Figura 4.25.

La composición vectorial de estas dos rotaciones diferenciales equivale a una rotación diferencial $\overrightarrow{d\phi}$ de componentes $\left(d\phi_y,d\phi_z\right)$ según los ejes principales. Esta rotación tiene por módulo:

$$d\phi = \sqrt{d\phi_y^2 + d\phi_z^2} = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{M_y^2}{I_y^2} + \frac{M_z^2}{I_z^2}}dx = \frac{M}{E}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{I_y^2} + \frac{\cos^2\alpha}{I_z^2}}\,dx \tag{4.33}$$

y, por tanto, la curvatura de la deformada de la directriz de la pieza puede calcularse mediante la expresión:

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{M_y^2}{I_y^2} + \frac{M_z^2}{I_z^2}} = \frac{M}{E}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{I_y^2} + \frac{\cos^2\alpha}{I_z^2}} \tag{4.34}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

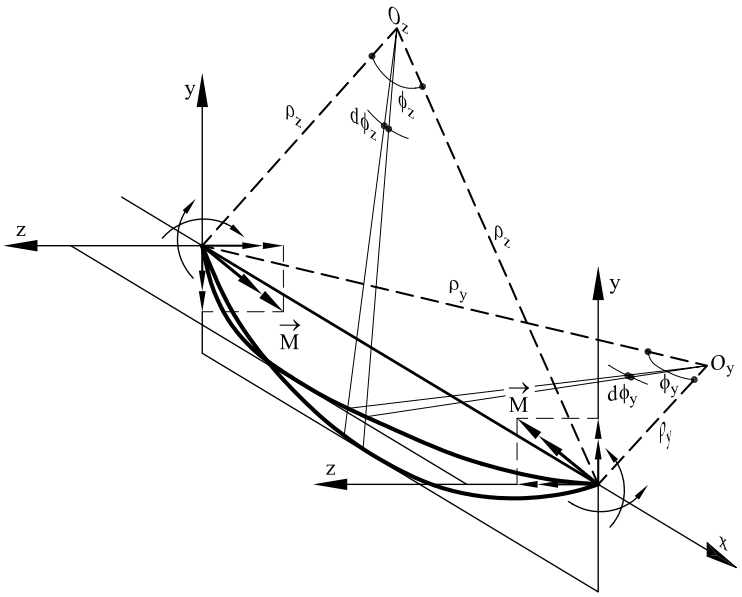

Fig. 4.25: Superposición de deformaciones en flexión esviada

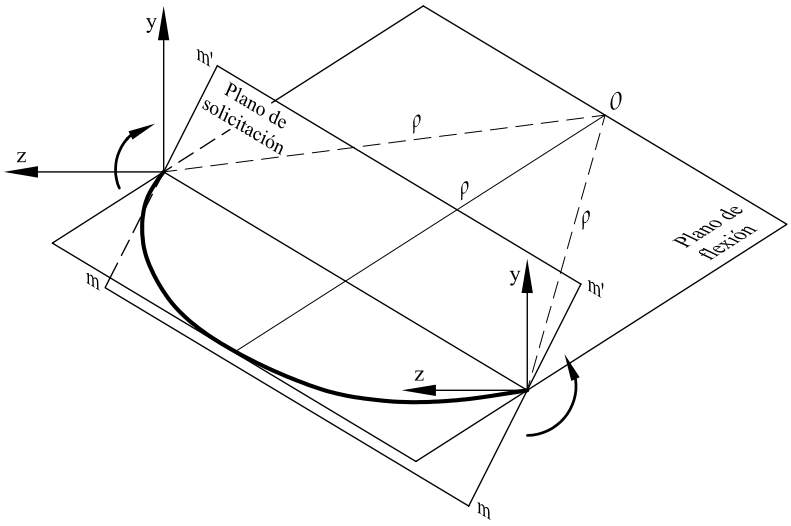

Fig. 4.26: Plano de solicitación y plano de flexión

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Por otro lado, el ángulo que forma el *vector* giro diferencial $\overrightarrow{d\phi}$ con el eje z es:

$$\frac{d\phi_y}{d\phi_z} = \frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y} = \tan\beta \tag{4.35}$$

que coincide con la dirección del eje neutro. Por tanto, la deformación por flexión se produce en el plano normal al eje neutro, o lo que es lo mismo, la sección gira un ángulo de valor $d\phi$ alrededor del eje neutro.

Obsérvese que las deformaciones producidas por las componentes M_z y M_y, actuando por separado, son planas, y la deformación resultante de ambas también corresponde a una curva plana, al ser la flexión uniforme a lo largo de la pieza. La curvatura de la deformada en cada sección es proporcional al momento actuante; al ser éste constante en flexión pura esviada, y estar considerando el caso de una viga de sección uniforme, la curvatura es idéntica para todas las secciones y la deformada del eje de la viga es un arco de circunferencia.

En resumen, en flexión pura esviada, y de acuerdo con la hipótesis de Bernoulli-Navier, las secciones rectas se mantienen planas en la deformación, girando alrededor del eje neutro y manteniéndose perpendiculares a la deformada de la directriz. En consecuencia, y tal como se muestra en la Figura 4.26, la deformada del eje de la pieza es un arco de circunferencia, contenido en el plano normal al eje neutro que, en general, *no coincide* con el plano de solicitación (el que contiene al momento flector actuante). De ahí el nombre de *flexión esviada* para este tipo de solicitación.

Ejemplo 4.3.2.1

Una sección rectangular de ancho $b = 30$ cm y altura $h = 40$ cm está sometida a la acción de un momento flector esviado contenido en el plano de una de las diagonales de la sección y de valor $M = 50$ kN·m. Calcular: (a) la dirección del eje neutro, (b) las tensiones máximas y (c) la curvatura de la directriz de la rebanada, si el módulo elástico vale $E = 20$ GPa.

(a) Por un lado, los momentos de inercia de la sección respecto a sus ejes principales de inercia son:

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{1}{12}hb^3 = \frac{1}{12}\,40\cdot 30^3 = 90.000\ \text{cm}^4 \\ I_z &= \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}\,30\cdot 40^3 = 160.000\ \text{cm}^4 \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

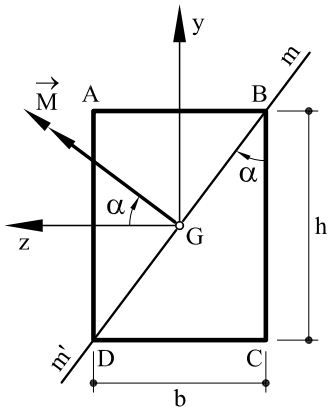

Fig. 4.27: Sección del Ejemplo 4.3.2.1

Por otro lado, y suponiendo que el momento está contenido en el plano de diagonal BD del rectángulo y que tiene el sentido de la Figura 4.27, las componentes del momento flector respecto a los ejes (y, z) son

$$\begin{aligned} M_y &= M\,\sin\alpha = 50\cdot\frac{3}{5} = 30 \text{ kN.m} \\ M_z &= M\,\cos\alpha = 50\cdot\frac{4}{5} = 40 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación del eje neutro es:

$$\tan\beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y} = \tan\,\alpha\,\frac{I_z}{I_y} = \frac{3}{4}\frac{160.000}{90.000} = \frac{4}{3}$$

Como puede verse en la Figura 4.28a, el eje neutro coincide en este caso con la otra diagonal del rectángulo, la recta AC. Este resultado puede obtenerse también de forma gráfica, tal como se muestra en la Figura 4.28b. Para ello, se dibuja la elipse central de inercia de la sección, con semiejes iguales a los radio de giro, $r_z = \sqrt{I_z/A} = 11{,}547$ cm y $r_y = \sqrt{I_y/A} = 8,66$ cm, y se dibuja el eje neutro como diámetro conjugado de la dirección de la traza del plano de solicitación.

(b) Dada la dirección del eje neutro, las tensiones máximas se dan en los puntos B y D, a los que corresponden la máxima compresión y tracción respectivamente:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= -\frac{M_z}{I_z}\,y_B + \frac{M_y}{I_y}\,z_B \\ &= -\frac{40\cdot 10^3}{16\cdot 10^{-4}}\,0,20 + \frac{30\cdot 10^3}{9\cdot 10^{-4}}\,(-0,15) \quad \text{Pa} = -10 \text{ MPa} \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

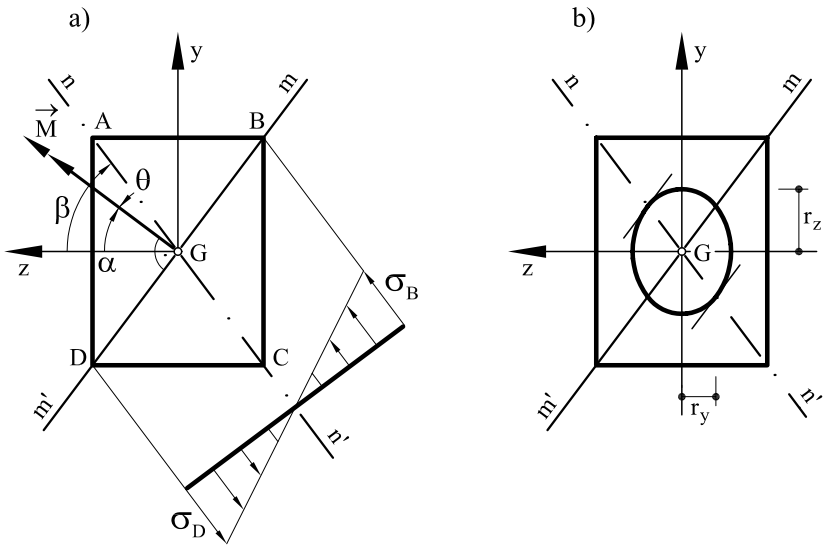

Fig. 4.28: Resolución del Ejemplo 4.3.2.1

$$\begin{aligned}\sigma_D &= -\frac{M_z}{I_z}\, y_D + \frac{M_y}{I_y}\, z_D \\ &= -\frac{40\cdot 10^3}{16\cdot 10^{-4}}\,(-0,20) + \frac{30\cdot 10^3}{9\cdot 10^{-4}}\,0,15 \quad \text{Pa} = \ +10 \text{ MPa}\end{aligned}$$

La correspondiente distribución de tensiones puede verse en la Figura 4.28a.

(c) El valor de la curvatura puede calcularse como:

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{1}{E}\sqrt{\frac{M_y^2}{I_y^2} + \frac{M_z^2}{I_z^2}} \\ &= \frac{1}{20\cdot 10^9}\sqrt{\frac{(30\cdot 10^3)^2}{(9\cdot 10^{-4})^2} + \frac{(40\cdot 10^3)^2}{(16\cdot 10^{-4})^2}} \ \text{m}^{-1} = \ 2,0833\cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}\end{aligned}$$

lo que corresponde a un radio de curvatura de $\rho = 480$ m.

4.3.3 Estudio directo

Se puede proceder al estudio de la flexión pura esviada de forma directa, sin necesidad de descomponer el momento flector actuante en componentes según los ejes principales de inercia. Consideremos para ello una situación como la mostrada en la Figura 4.29a, donde α y β son los ángulos formados por el vector $\overrightarrow{M}$ y el eje neutro con el eje z,

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

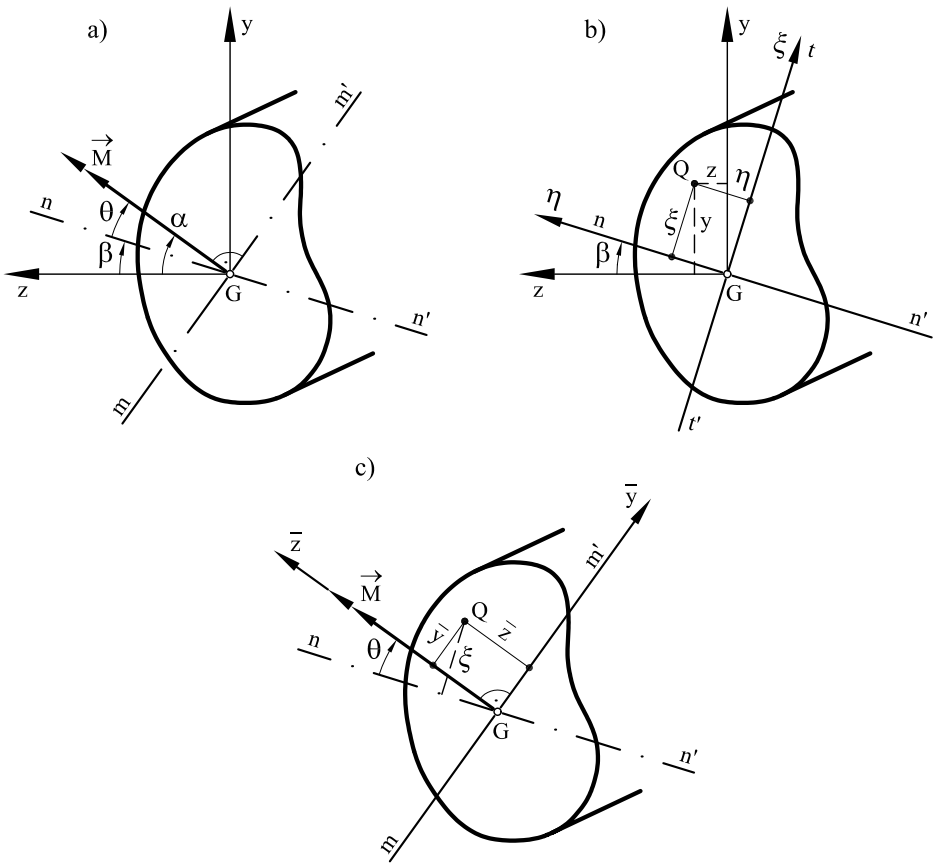

Fig. 4.29: Estudio directo de la flexión esviada

respectivamente, y $\theta = \alpha - \beta \neq 0$ es el ángulo de esviaje, es decir, el ángulo que forma el vector momento respecto al eje neutro.

Aceptando la hipótesis de Bernoulli-Navier de deformación plana de las secciones girando alrededor del eje neutro, la elongación en una fibra que pasa por un punto Q arbitrario de la sección es:

$$\epsilon_x = -\frac{\xi}{\rho} \tag{4.36}$$

donde ξ es la distancia del punto considerado al eje neutro (tomada positiva si el punto está en la zona comprimida de la sección, y negativa en caso contrario, ver Figura 4.29b) y ρ es el radio de curvatura de la deformada de la directriz de la viga. Si se cumple la ley de Hooke, la tensión normal en dicha fibra vendrá dada por:

$$\sigma_x = E\,\epsilon_x = -\frac{E\,\xi}{\rho} \tag{4.37}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

donde E es el módulo de elasticidad del material de la pieza. Integrando la distribución de tensiones se tiene que su resultante es:

$$N = 0 = \int_S \sigma_x \, dS = -\int_S \frac{E\xi}{\rho} \, dS = -\frac{E}{\rho} \int_S \xi \, dS \tag{4.38}$$

lo que demuestra que el eje neutro pasa por el centro de gravedad de la sección.

El momento resultante de las tensiones respecto al eje neutro nn' es:

$$M_{nn'} = -\int_S \sigma_x \, \xi \, dS = \int_S \frac{E\xi}{\rho} \, \xi \, dS = \frac{E}{\rho} \int_S \xi^2 \, dS = \frac{E \, I_{nn'}}{\rho} \tag{4.39}$$

donde $M_{nn'}$ debe ser igual a la proyección del momento flector M sobre el eje neutro ($M_{nn'} = M \cos\theta$, ver Figura 4.29a) y $I_{nn'}$ es el momento de inercia de la sección respecto a dicho eje.

De la expresión anterior se obtiene el valor de la curvatura de la directriz:

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{M_{nn'}}{EI_{nn'}} \tag{4.40}$$

Esta expresión de la curvatura es alternativa a la obtenida en el apartado anterior, ecuación (4.34). Eliminando el radio de curvatura ρ de las expresiones (4.37) y (4.40), se obtiene:

$$\sigma_x = -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \xi \tag{4.41}$$

Esta es una fórmula para el cálculo de tensiones en flexión esviada alternativa a la ecuación (4.26a). En ella resulta evidente que las tensiones son proporcionales a la distancia al eje neutro (ley de Navier) y que, por tanto, las tensiones máximas se dan en las fibras más alejadas de dicho eje, tal como se muestra en la Figura 4.30.

Obsérvese que para el caso en que M actúe según uno de los ejes principales de inercia, esta fórmula se reduce a las obtenidas para flexión pura recta:

$$\sigma_x = -\frac{M_z \, y}{I_z} \qquad ; \qquad \sigma_x = \frac{M_y \, z}{I_y} \tag{4.42}$$

según el vector momento M actúe paralelo al eje z o al eje y, respectivamente, y con los convenios de signos convencionales.

La expresión (4.41) permite calcular el valor de las tensiones en la sección siempre que se conozca la direción del eje neutro. Ésta puede determinarse sabiendo que el momento resultante de las tensiones σ_x respecto del eje mm' es nulo. Efectivamente, llamando $\bar{z}$ a la distancia desde el punto Q al eje mm' (ver Figura 4.29c), se tiene:

$$0 = \int_S \sigma_x \, \bar{z} \, dS = -\int_S \frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \xi \, \bar{z} \, dS = -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \int_S \xi \, \bar{z} \, dS \tag{4.43}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

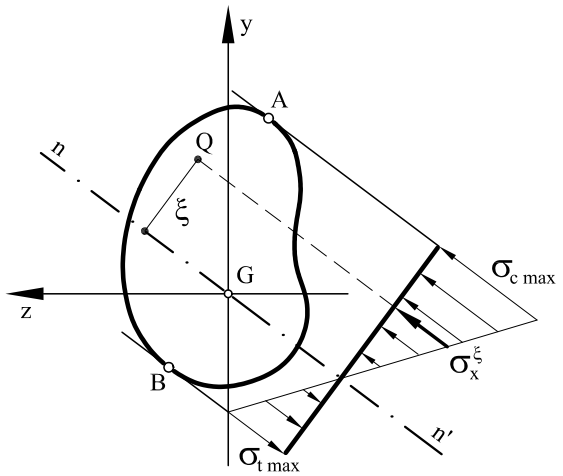

Fig. 4.30: Distribución de tensiones en flexión esviada

de donde se deduce que $\int_S \xi\ \bar{z}\ dS = 0$. Ahora bien, dado que θ es el ángulo que forman entre sí los pares de ejes (ξ, η) y $(\bar{y}, \overline{z})$, se tiene que $\xi = \bar{y}\cos\theta + \bar{z}\ \sin\theta$, y entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S \xi\ \bar{z}\ dS = \int_S (\bar{y}\cos\theta + \bar{z}\ \sin\theta)\ \bar{z}\ dS = \\ &= \cos\theta\, I_{\bar{y}\bar{z}} + \sin\theta\, I_{\overline{y}} \end{aligned} \tag{4.44}$$

es decir,

$$\tan\theta = -\frac{I_{\bar{y}\bar{z}}}{I_{\overline{y}}} \tag{4.45}$$

que proporciona el *ángulo de esviaje* θ, a partir de los momentos $I_{\bar{y}\bar{z}}$ e $I_{\bar{z}}$ de la sección respecto de los ejes $(\bar{y}, \bar{z})$, definidos por el plano de actuación del momento (medido tal como se muestra en la Figura 4.29c).

Ejercicio 4.3.3.1

Comprobar que las expresiones obtenidas en el estudio directo de la flexión esviada coinciden con las obtenidas en el estudio aplicando el principio de superposición.

(a) La distancia ξ desde un punto Q de la sección, de coordenadas $Q(y, z)$ respecto a los ejes principales de inercia, al eje neutro cuya ecuación es:

$$-\frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z = 0$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

se calcula fácilmente como

$$\xi = \frac{-\frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z}{-\sqrt{\frac{M_z^2}{I_z^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}}}$$

donde se adopta el signo positivo para ξ si el punto Q está en la zona comprimida de la sección, y el negativo en caso contrario.

(b) Comparando las dos expresiones alternativas obtenidas para la ley de tensiones:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z}\,y + \frac{M_y}{I_y}\,z \qquad \text{y} \qquad \sigma_x = -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}}\xi$$

y las dos expresiones alternativas obtenidas para la curvatura

$$\chi = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{M_y^2}{I_y^2} + \frac{M_z^2}{I_z^2}} \qquad \text{y} \qquad \chi = \frac{1}{\rho} = \frac{M_{nn'}}{EI_{nn'}}$$

y viendo la expresión análitica de ξ en función de las coordenadas $Q(y, z)$ respecto de los ejes principales de inercia de la sección, se comprueba que las expresiones alternativas coinciden exactamente si se demuestra que:

$$\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \equiv \sqrt{\frac{M_y^2}{I_y^2} + \frac{M_z^2}{I_z^2}}$$

(c) Sean los ángulos α, β y θ los definidos en la Figura 4.29a, es decir: α es el ángulo que el vector momento forma con el eje z, β es el ángulo que el eje neutro forma con el eje z, y $\theta = \alpha - \beta$ es el ángulo de esviaje, o sea, el ángulo que forma el vector momento con el eje neutro.

Por una parte, el momento de inercia de la sección respecto del eje neutro, a partir de los momentos principales de inercia, es:

$$\begin{aligned} I_{nn'} &= I_z \cos^2\beta + I_y \sin^2\beta - I_{yz} \sin 2\beta \\ &= I_z \cos^2\beta + I_y \sin^2\beta \end{aligned}$$

al ser los ejes (y, z) principales de inercia ($I_{yz} = 0$). Por otra parte, la proyección del momento según el eje neutro es:

$$\begin{aligned} M_{nn'} &= M \cos\theta \\ &= M \cos(\alpha - \beta) \\ &= M (\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) \\ &= M_z \cos\beta + M_y \sin\beta \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

(c) El ángulo β puede calcularse en función de las componentes principales del momento. En efecto, se sabe que:

$$\tan\beta = \frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y}$$

y, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\cos^2\beta &= \frac{1}{1+\tan^2\beta} = \frac{M_z^2 I_y^2}{M_y^2 I_z^2 + M_z^2 I_y^2}\\ \sin^2\beta &= 1-\cos^2\beta = \frac{M_y^2 I_z^2}{M_y^2 I_z^2 + M_z^2 I_y^2}\end{aligned}$$

(d) Utilizando estas expresiones y operando se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} &= \frac{M_z\cos\beta + M_y\sin\beta}{I_z\cos^2\beta + I_y\sin^2\beta}\\ &= \frac{M_z^2 I_y + M_y^2 I_z}{M_z^2 I_z I_y^2 + M_y^2 I_y I_z^2}\cdot\frac{M_y^2 I_z^2 + M_z^2 I_y^2}{(M_y^2 I_z^2 + M_z^2 I_y^2)^{\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{1}{I_y I_z}\left(M_y^2 I_z^2 + M_z^2 I_y^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(q.e.d.)}\end{aligned}$$

lo que demuestra la equivalencia entre las expresiones halladas en el estudio de la flexión esviada referida a los ejes principales con las obtenidas en el estudio directo.

Ejercicio 4.3.3.2

Demostrar que el momento resultante de la distribución de tensiones normales obtenida en el estudio directo de flexión esviada, ecuación (4.41), es igual al momento flector actuante sobre la sección.

Llamaremos $M_{nn'}$ y $M_{tt'}$ a las componentes de $\overrightarrow{M}$ según el eje neutro nn' y un eje perpendicular tt', respectivamente (ver Figura 4.29b). Llamaremos (ξ,η) a las coordenadas en dichos ejes de un punto genérico de la sección Q de coordenadas (y,z) respecto de los ejes principales de inercia.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

El enunciado del ejercicio queda demostrado si se verifican las relaciones de equilibrio interno:

$$M_{nn'} = -\int_S \sigma_x \xi \, dS \qquad \text{y} \qquad M_{tt'} = \int_S \sigma_x \eta \, dS$$

para la distribución de tensiones normales obtenida del estudio directo, esto es,

$$\sigma_x = -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \xi$$

(a) Calculemos primero el momento resultante de la ley de tensiones respecto del eje neutro:

$$\begin{aligned} \int_S \sigma_x \xi \, dS &= \int_S -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \xi^2 \, dS \\ &= -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \int_S \xi^2 \, dS \\ &= -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} I_{nn'} \\ &= -M_{nn'} \qquad \text{(q.e.d)} \end{aligned}$$

(b) Calculemos ahora el momento resultante de las tensiones respecto al eje perpendicular al eje neutro:

$$\begin{aligned} \int_S \sigma_x \eta \, dS &= \int_S -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \xi\eta \, dS \\ &= -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \int_S \xi\eta \, dS \\ &= -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \, I_{nt} \\ &= M_{tt'} \qquad \text{(q.e.d)} \end{aligned}$$

En efecto, sean los ángulos α, β y θ los definidos en la Figura 4.29a, es decir: α es el ángulo que el vector momento forma con el eje z, β es el ángulo que el eje neutro forma con el eje z, y $\theta = \alpha - \beta$ es el ángulo de esviaje, o sea, el ángulo que forma el vector momento con el eje neutro.

Por una parte, el producto de inercia de la sección respecto del eje neutro, a partir de los momentos principales de inercia, es:

$$\begin{aligned} I_{nt} &= \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\beta - I_{yz} \cos 2\beta \\ &= (I_z - I_y) \sin\beta \cos\beta \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

al ser los ejes (y, z) principales de inercia ($I_{yz} = 0$). Por otra parte, la proyección del momento según el eje tt' es:

$$\begin{aligned} M_{tt'} &= M \sin\theta \\ &= M \sin(\alpha - \beta) \\ &= M (\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta) \\ &= M_y \cos\beta - M_z \sin\beta \end{aligned}$$

Utilizando estas expresiones y operando se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{M_{tt'}}{I_{nt}} &= \frac{M_y \cos\beta - M_z \sin\beta}{(I_z - I_y)\sin\beta\cos\beta} \\ &= \frac{M_y M_z I_y - M_z M_y I_z}{(I_z - I_y)\, M_y I_z\, M_z I_y} \cdot \frac{M_y^2 I_z^2 + M_z^2 I_y^2}{(M_y^2 I_z^2 + M_z^2 I_y^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{1}{I_y\, I_z} \left(M_y^2 I_z^2 + M_z^2 I_y^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \qquad \text{(q.e.d.)} \end{aligned}$$

donde se han usado las expresiones obtenidas en el Ejercicio anterior para $\sin\beta$ y $\cos\beta$, así como el resultado:

$$\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} = \frac{1}{I_y\, I_z} \left(M_y^2 I_z^2 + M_z^2 I_y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

obtenido en dicho Ejercicio.

Esta última demostración se puede escribir también en la forma:

$$\tan\theta = \frac{M_{tt'}}{M_{nn'}} = -\frac{I_{nt}}{I_{nn'}}$$

donde θ es el ángulo de esviaje que forma el vector momento con el eje neutro (ver Figuras 4.29a y c).

Ejercicio 4.3.3.3

Demostrar que la dirección del eje neutro obtenida en el estudio directo de flexión esviada coincide con la calculada en el estudio según los ejes principales.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

La proposición del enunciado queda demostrada si se comprueba que

$$\tan\theta = -\frac{I_{\bar{y}\bar{z}}}{I_{\overline{y}}} = \tan\ (\alpha - \beta)$$

con

$$\tan\alpha\ = \frac{M_y}{M_z} \qquad \text{y} \qquad \tan\ \beta = \frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y}$$

donde, de nuevo, los ángulos α, β y θ son los definidos en la Figura 4.29a, es decir: α es el ángulo que el vector momento forma con el eje z, β es el ángulo que el eje neutro forma con el eje z, y $\theta = \alpha - \beta$ es el ángulo de esviaje, o sea, el ángulo que forma el vector momento con el eje neutro.

Calcularemos primero los momentos de inercia de la sección respecto a los ejes $(\overline{y},\ \overline{z})$ definidos por la recta mm' y la dirección del vector momento, y que se muestran en la Figura 4.29c. Sea α el ángulo entre los ejes $(\overline{y},\ \overline{z})$ y los ejes principales de inercia (y, z). Se tiene:

$$\begin{aligned}
I_{\overline{y}} &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\ \cos\ (-2\alpha) - I_{yz}\sin\ (-2\alpha) \\
I_{\bar{z}} &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\ \cos\ (-2\alpha) + I_{yz}\sin\ (-2\alpha) \\
I_{\bar{y}\bar{z}} &= \frac{I_y - I_z}{2}\ \sin\ (-2\alpha) + I_{yz}\cos\ (-2\alpha)
\end{aligned}$$

con $I_{yz} = 0$ al ser los ejes $(y,\ z)$ principales de inercia. Por tanto:

$$\begin{aligned}
I_{\overline{y}} &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\ \cos 2\alpha \\
I_{\bar{z}} &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\ \cos 2\alpha \\
I_{\bar{y}\bar{z}} &= -\frac{I_y - I_z}{2}\ \sin\ 2\alpha
\end{aligned}$$

Sustituyendo y operando:

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= -\frac{I_{\bar{y}\bar{z}}}{I_{\overline{y}}} \\
&= \frac{(I_y - I_z)\ \sin\ 2\alpha}{(I_y + I_z) + (I_y - I_z)\ \cos 2\alpha} \\
&= \frac{(I_y - I_z)\ 2\sin\ \alpha\ \cos\alpha}{(I_y + I_z) + (I_y - I_z)\ (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} \\
&= \frac{(I_y - I_z)\ \tan\alpha}{I_y + I_z\tan^2\alpha} \\
&= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \\
&= \tan\ (\alpha - \beta) \qquad \text{(q.e.d.)}
\end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ejemplo 4.3.3.1

Resolver el Ejemplo 4.3.2.1 utilizando las fórmulas obtenidas en el estudio directo de la flexión esviada.

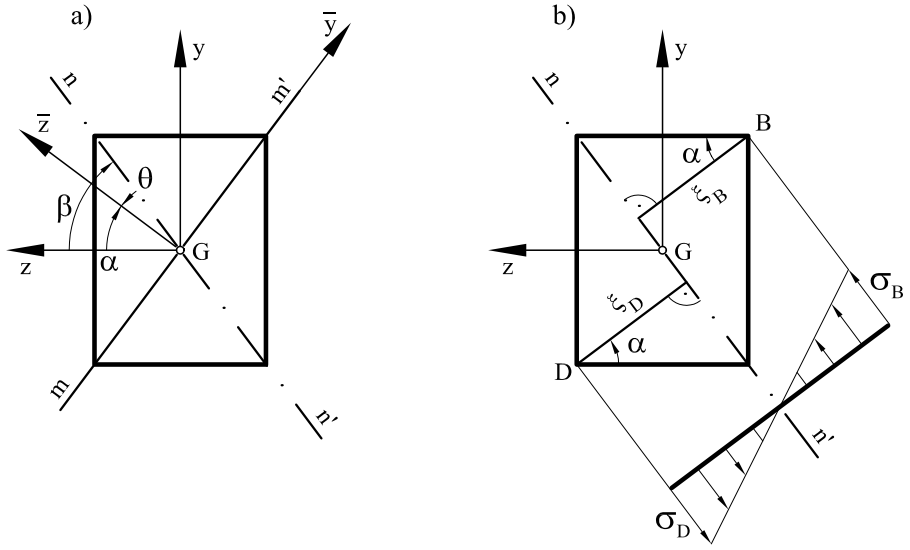

Fig. 4.31: Resolución del Ejemplo 4.3.3.1

(a) Calculamos primero los momentos de inercia de la sección respecto a los ejes $(\overline{y}, \overline{z})$, definidos por la recta mm' y la dirección del vector momento, tal como se muestran en la Figura 4.31a. Se tiene:

$$\begin{aligned} I_{\overline{y}} &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos\,(-2\alpha) - I_{yz} \sin\,(-2\alpha) \\ I_{\overline{z}} &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos\,(-2\alpha) + I_{yz} \sin\,(-2\alpha) \\ I_{\overline{y}\overline{z}} &= \frac{I_y - I_z}{2} \sin\,(-2\alpha) + I_{yz} \cos\,(-2\alpha) \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores correspondientes: $I_y = 9 \cdot 10^{-4}$ m^4, $I_z = 16 \cdot 10^{-4}$ m^4, $I_{yz} = 0$ y el ángulo $\alpha = \arctan\,(3/4)$ ($\sin\,2\alpha = 0,96; \cos\,2\alpha = 0,28$), se tiene:

$$I_{\overline{y}} = 11,52 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4 \quad ; \quad I_{\overline{z}} = 13,48 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4 \quad ; \quad I_{\overline{y}\overline{z}} = 3,36 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Por lo tanto, la pendiente del eje neutro respecto del vector momento es:

$$\tan\theta = -\frac{I_{\bar{y}\bar{z}}}{I_{\overline{y}}} = -\frac{3,36\cdot 10^{-4}}{11,52\cdot 10^{-4}} = -0,29167$$

con lo que el ángulo de esviaje es $\theta = -16,26^o$, tal como se muestra en la Figura 4.31a.

(b) El momento de inercia de la sección respecto del eje neutro es:

$$\begin{aligned} I_{nn'} &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos(-2\beta) + I_{yz}\sin(-2\beta) \\ &= 11,52\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^4 \end{aligned}$$

con $\beta = \arctan(4/3)$, siendo $\beta = \pi/2 - \alpha$, tal como se muestra en la Figura 4.31a. Es obvio que $I_{nn'} = I_{\overline{y}}$.

Por otra parte, la proyección del momento según el eje neutro es:

$$M_{nn'} = M\cos\theta = 50\cdot 0,96 = 48\ \mathrm{kN.m}$$

Dada la dirección del eje neutro, las tensiones máximas se dan en los puntos B y D, a los que corresponden la máxima compresión y tracción, respectivamente. Las distancias de estos puntos al eje neutro son: $\xi_B = b\cos\alpha = 24$ cm, $\xi_D = -b\cos\alpha = -24$ cm. Las tensiones en estos puntos valen:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}}\xi_B \\ &= -\frac{48\cdot 10^3}{11,52\cdot 10^{-4}}(+0,24)\ \ \mathrm{Pa} = -10\ \mathrm{MPa} \\ \sigma_D &= -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}}\xi_D \\ &= -\frac{48\cdot 10^3}{11,52\cdot 10^{-4}}(-0,24)\ \ \mathrm{Pa} = +10\ \mathrm{MPa} \end{aligned}$$

La correspondiente distribución de tensiones puede verse en la Figura 4.31a.

(c) El valor de la curvatura puede calcularse como:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{E}\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \\ &= \frac{1}{20\cdot 10^9}\frac{48\cdot 10^3}{11,52\cdot 10^{-4}}\ \mathrm{m}^{-1} = 2,0833\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^{-1} \end{aligned}$$

lo que corresponde a un radio de curvatura de $\rho = 480$ m.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

4.4 Flexión simple

Se ha desarrollado en este Capítulo el estudio del caso de solicitación que se ha denominado *flexión pura,* que corresponde a una ley de momentos flectores constante a lo largo de la pieza. Sin embargo, el tipo de flexión más frecuente en vigas rectas con fuerzas normales a su eje es el de *flexión simple*, en la que la ley de momentos flectores es variable. Tal como puede observarse en la Figura 4.32, la variación del momento flector exige, por equilibrio de la rebanada diferencial, que sobre las secciones de la pieza actúe un esfuerzo cortante de componentes:

$$T_y = -\frac{dM_z}{dx} \quad ; \quad T_z = \frac{dM_y}{dx} \tag{4.46}$$

El esfuerzo cortante da lugar a la aparición de distorsiones angulares y tensiones tangenciales en la sección, como se verá en el Capítulo correspondiente. Como consecuencia de la existencia de estas distorsiones angulares, además de producirse las elongaciones de las fibras longitudinales propias de la flexión, se produce cierta deformación de las secciones planas. Este fenómeno, que puede observarse en la Figura 4.33, se conoce con el nombre de *alabeo* de las secciones rectas. Dado que los resultados obtenidos par la flexión pura se basan en la hipótesis de que las secciones permanecen planas, es decir, sin alabeo, cabe hacerse la pregunta de si estos resultados pueden aplicarse en el caso de que éste se produzca.

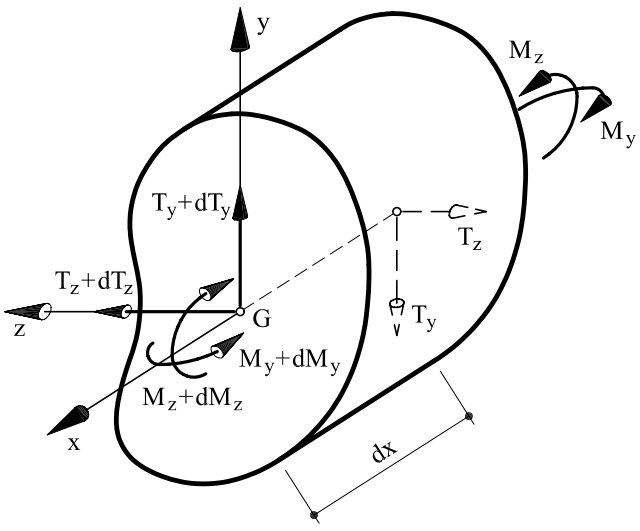

Fig. 4.32: Equilibrio de momentos y cortantes en flexión simple

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

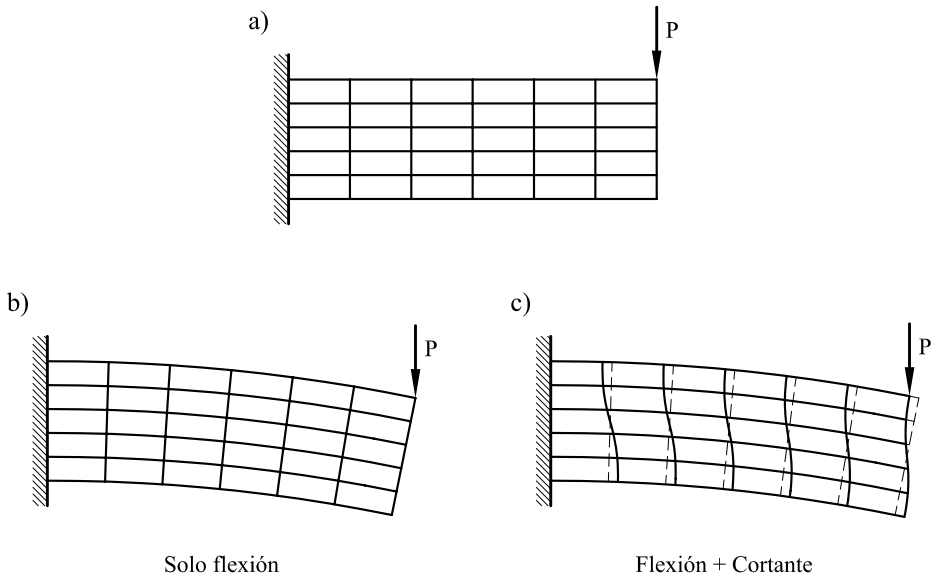

Fig. 4.33: Deformación en flexión simple: (a) sin deformar, (b) deformación sin alabeo y (c) deformación con alabeo

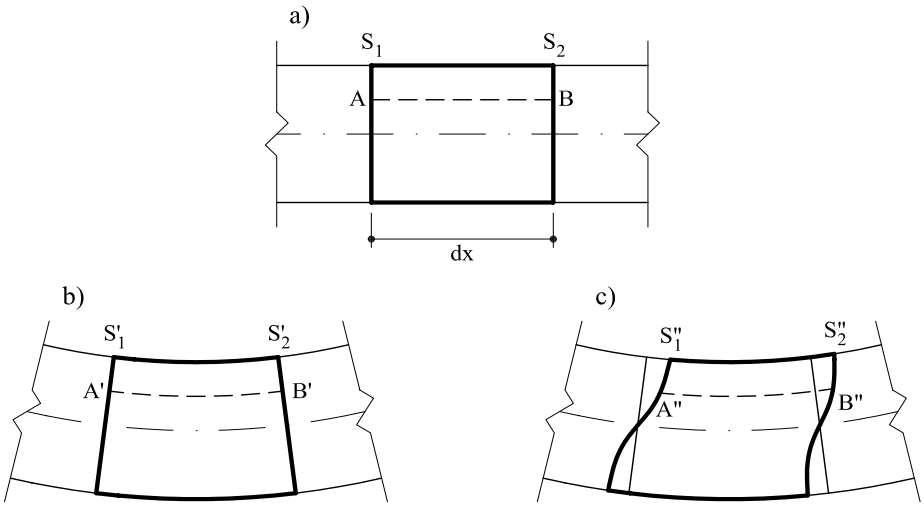

Fig. 4.34: Elongación de las fibras en flexión: (a) sin deformar, (b) sin alabeo y (c) con alabeo

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

En el caso de la flexión simple, se admite la *hipótesis generalizada de Bernoulli-Navier,* que expresa que

"dos secciones rectas infinitamente próximas experimentan alabeo en la deformación, pero cualquiera de ellas puede superponerse a la otra mediante una traslación y un giro."

Esta hipótesis generalizada admite el alabeo de las secciones rectas, pero desprecia el *alabeo relativo* entre dos secciones próximas. Es obvio que el alabeo relativo es nulo si la sección recta es uniforme y el esfuerzo cortante es constante a lo largo de la pieza. En otras circunstancias la hipótesis generalizada es sólo una *aproximación*, admisible en general, porque las deformaciones longitudinales producidas por el esfuerzo cortante son mucho menores que las producidas por el momento flector. La aproximación es tanto mejor cuanto menor sea la relación canto/luz de la pieza, es decir, cuanto más esbelta sea ésta. Para piezas esbeltas el efecto del alabeo es despreciable, mientras que para vigas de espesor moderado o grande éste puede tener cierta importancia.

Si se admite la hipótesis generalizada, entonces, según se muestra en la Figura 4.34, puede considerarse que la elongación de una fibra tal como la AB, que se deforma realmente en $A''B''$ (con alabeo), es idéntica a la elongación que se produciría si la deformación fuese como $A'B'$ (sin alabeo). Dado que todas las expresiones obtenidas para la flexión pura se basan en la magnitud de las elongaciones longitudinales de las fibras, es obvio que si se admite la hipótesis generalizada de deformación de Bernoulli-Navier, la totalidad de las expresiones halladas para el caso de la flexión pura pueden extenderse al caso más general de la flexión simple. Así por ejemplo, en el caso de flexión simple esviada son válidas las expresiones obtenidas para la ley de tensiones (distribución lineal):

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \tag{4.47}$$

o alternativamente,

$$\sigma_x = \frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \xi \tag{4.48}$$

y también lo es, por tanto, la ecuación del eje neutro:

$$\frac{y}{z} = \frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y} \tag{4.49}$$

y las observaciones relativas a dicho eje que se expusieron en el apartado correspondiente. También son válidas las expresiones obtenidas para la curvatura de la deformada de la línea media

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{M_y^2}{I_y^2} + \frac{M_z^2}{I_z^2}} \tag{4.50}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

o alternativamente,

$$\chi = \frac{M_{nn'}}{EI_{nn'}} \tag{4.51}$$

Cabe señalar, sin embargo, que en flexión simple la deformada de la directriz no es un arco de circunferencia, ya que la curvatura variará de sección a sección, al variar el momento flector actuante. En general, esta deformada ni siquiera será una curva plana, salvo en el caso en que la flexión, aunque variable, se produzca siempre según el mismo plano de solicitación, tal como se muestra, por ejemplo, en la Figura 4.35.

En el caso particular de flexión simple recta (plano de solicitación coincidente siempre con uno de los planos principales de flexión de la pieza) las expresiones anteriores son válidas, debidamente simplificadas. En este caso, la deformada de la línea media es necesariamente una curva plana, pero no de curvatura constante.

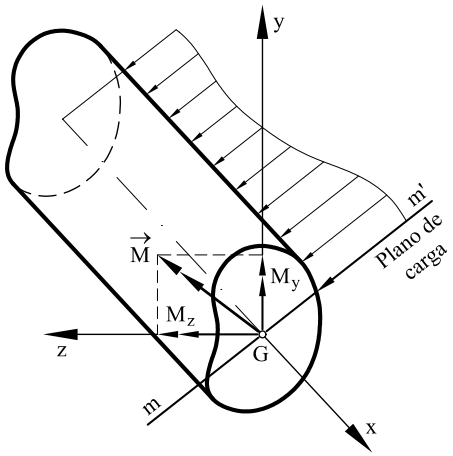

Fig. 4.35: Flexión simple con plano de carga constante

Ejemplo 4.4.1

Se quiere elegir la sección de unas piezas prismáticas para utilizar como correas en un tejado de pendiente $\alpha = 20^o$. Se dispone de un perfil normalizado IPN 80 (ancho $a = 42\,\text{mm}$, altura $b = 80$ mm, $I_z = 77,8\,\text{cm}^4$, $I_y = 6,29\,\text{cm}^4$) y de una sección tubular rectangular (ancho $a = 40\,\text{mm}$, altura $b = 80\,\text{mm}$, espesor $e = 2\,\text{mm}$, $I_z = 38,97\ \text{cm}^4$, $I_y = 13,12\ \text{cm}^4$). Determinar: (a) cuál de ellas es la más resistente, si ambas van a estar sometidas a carga vertical descendente y (b) el valor de α para que ambas secciones resistan el mismo momento.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

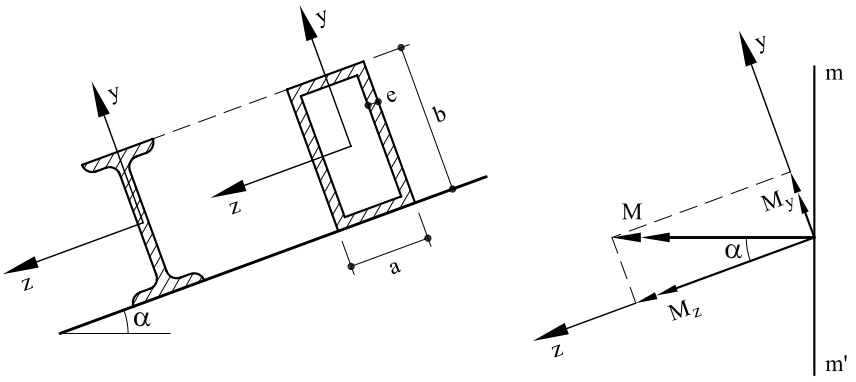

Fig. 4.36: Secciones del Ejemplo 4.4.1

(a) Las dos secciones tienen las mismas direcciones principales de inercia. Las componentes del momento M vertical según los ejes principales (y, z) son:

$$\begin{aligned} M_z &= M\,\cos\alpha = 0,940\,M \\ M_y &= M\,\sin\alpha = 0,342\,M \end{aligned}$$

Sección IPN 80: La ecuación del eje neutro para un momento M es:

$$\tan\beta = \frac{y}{z} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{I_z}{I_y} = \frac{0,342}{0,940}\frac{77,8}{6,29} = 4,50 \quad \Rightarrow \beta = 77^o 28' 16''$$

La tensión máxima se produce en los puntos más alejados del eje neutro, es decir, en los puntos C y D (Figura 4.37), y su valor puede calcularse, para un momento M [kN.m] como:

$$\begin{aligned} \sigma_C &= -\frac{M_z}{I_z}\,y_C + \frac{M_y}{I_y}\,z_C \\ &= -\frac{0,940\cdot 10^3\,M}{77,8\cdot 10^{-8}}\,4,0\cdot 10^{-2} + \frac{0,342\cdot 10^3\,M}{6,29\cdot 10^{-8}}(-2,1\cdot 10^{-2}) \ \text{Pa} \\ &= -16,25\,M \ \text{MPa} \qquad \text{(compresión máxima)} \end{aligned}$$

La tensión en el punto D tiene el mismo valor absoluto, pero es de signo contrario, es decir, corresponde a la máxima tracción.

Sección Tubular: La ecuación del eje neutro, en este caso, es igual a:

$$\tan\beta = \frac{y}{z} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{I_z}{I_y} = \frac{0,342}{0,940}\frac{38,97}{13,12} = 1,08 \quad \Rightarrow \beta = 47^o 12' 9''$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

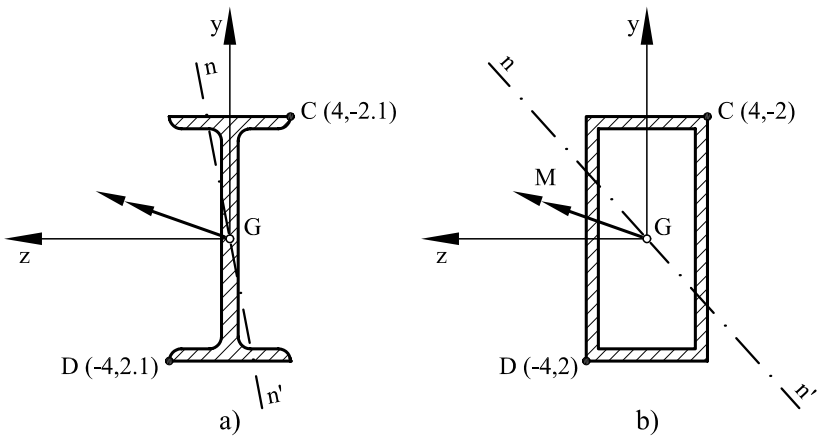

Fig. 4.37: Ejes neutros y puntos de máxima tensión en Ejemplo 4.4.1

La tensión máxima se produce en los vértices C y D de la sección y su valor, para un momento M [kN.m], es igual a:

$$\begin{aligned}\sigma_C &= -\frac{M_z}{I_z}\,y_C + \frac{M_y}{I_y}\,z_C \\ &= -\frac{0,940\cdot 10^3 M}{38,97\cdot 10^{-8}}\,4\cdot 10^{-2} + \frac{0,342\cdot 10^3 M}{13,12\cdot 10^{-8}}(-2\cdot 10^{-2}) \ \text{Pa} \\ &= -14,86\,M \quad \text{MPa} \qquad \text{(compresión máxima)}\end{aligned}$$

La tensión en el vértice D es igual en valor absoluto, pero es de tracción.

De los valores de las tensiones máximas obtenidas, se observa que, para la solicitación considerada, la sección tubular es *más resistente* que el perfil IPN 80, siendo la diferencia del orden de un 10 % aproximadamente.

(b) Para un ángulo α cualquiera, se puede escribir:

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z \\ &= M\left(-\frac{\cos\alpha}{I_z}\,y + \frac{\sin\alpha}{I_y}\,z\right)\end{aligned}$$

Tensión máxima en el perfil IPN 80:

$$\sigma_{\max}^{\text{IPN}} = M\left[-\frac{\cos\alpha}{77,8}(4) + \frac{\sin\alpha}{6,29}(-2,1)\right]\cdot 10^9$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Tensión máxima en la sección tubular:

$$\sigma_{\max}^{\text{tubo}} = M \left[-\frac{\cos\alpha}{38,97}(4) + \frac{\sin\alpha}{13,12}(-2) \right] \cdot 10^9$$

Igualando se tiene:

$$\frac{4}{77,8}\cos\alpha + \frac{2,1}{6,29}\sin\alpha = \frac{4}{38,97}\cos\alpha + \frac{2}{13,12}\sin\alpha$$

de donde

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,051230}{0,181424} = 0,2823 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 15^o 46' 6''$$

Obviamente, para ángulos inferiores a $\alpha = 15^o 46' 6''$, la IPN es más resistente, ya que tiene mayor módulo resistente W_z. Para ángulos superiores a $\alpha = 15^o 46' 6''$, la sección tubular es más resistente, ya que tiene mayor módulo resistente W_y.

4.5 Flexión en piezas planas de pequeña curvatura

Aunque en el Capítulo 2 se ha definido el concepto de pieza prismática de tal forma que incluye a las piezas curvas, en toda la exposición referente a la flexión se ha partido siempre de la hipótesis de que la directriz de la pieza era recta. Es evidente, sin embargo, que muchos casos prácticos de interés conciernen a piezas de directriz inicialmente curva, como, por ejemplo, los arcos. De hecho, ya Navier se ocupó del estudio de la flexión en piezas planas de pequeña curvatura en la primera edición de su libro de Resistencia de Materiales (1826), debido precisamente al interés que el cálculo de arcos suscitaba en aquella época.

Definamos como *piezas planas de pequeña curvatura* aquellas piezas de directriz plana en las que la curvatura inicial, $\chi_o = 1/\rho_o$, es despreciable frente al canto de la pieza h, es decir, $h << \rho_o$. Supongamos que en la deformación de una de estas piezas sometida a *flexión recta en su plano* es válida la hipótesis de deformación de Bernoulli-Navier, es decir, admitamos que *la variación de curvatura* de la directriz de la pieza (ver ecuación (4.8)):

$$\Delta\chi_z = \frac{1}{\rho_z} - \frac{1}{\rho_o} = \frac{M_z}{EI_z} \tag{4.52}$$

donde ρ_o y ρ_z son los radios de curvatura de la directriz antes y después de la deformación, respectivamente, M_z es el momento flector actuante sobre el plano que contiene a la directriz y I_z es el producto de inercia correspondiente. En esta situación, las fórmulas obtenidas en este Capítulo para piezas rectas son una buena aproximación para el

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

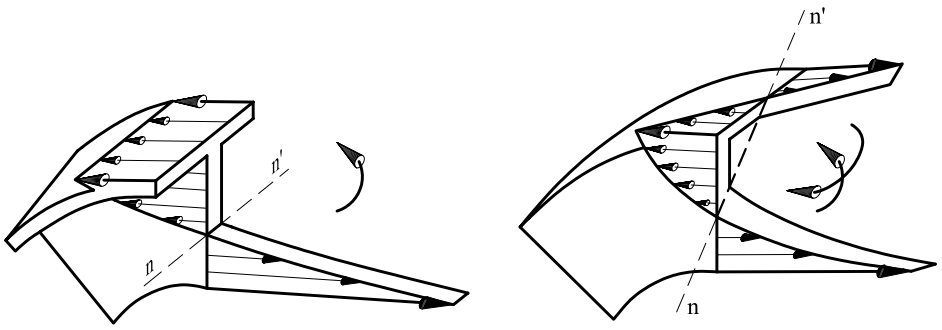

Fig. 4.38: Distribución de tensiones en piezas curvas según la teoría de Winkler

estudio de piezas planas de pequeña curvatura. En particular, es válida la expresión de la ley de tensiones (ley de Navier),

$$\sigma_x = -\frac{M_z\, y}{I_z} \tag{4.53}$$

y lo es, también, la expresión del giro relativo entre secciones infinitamente próximas:

$$d\phi_z = \frac{M_z}{EI_z}\, ds \tag{4.54}$$

Bajo las mismas hipótesis, también son generalizables al caso de piezas planas de pequeña curvatura las expresiones obtenidas para *flexión esviada* en piezas rectas.

Si la curvatura inicial de la pieza, $\chi_o = 1/\rho_o$, no es despreciable frente al canto de la misma, las fórmulas anteriores no son satisfactorias. En este caso, se puede usar la *teoría de Winkler de flexión en piezas curvas* (1858). En su teoría, Winkler mantiene la hipótesis de que las secciones rectas permanecen planas en la deformación, pero tiene en cuenta que, debido a la curvatura inicial de la pieza, las fibras longitudinales de una rebanada diferencial no tienen la misma longitud y, por tanto, las deformaciones y tensiones que se producen en ellas *no son proporcionales a sus distancias al eje neutro*. En este caso, la distribución de tensiones no es lineal y el eje neutro no pasa por el centro de gravedad de la sección, tal como se muestra en la Figura 4.38.

4.6 Secciones de varios materiales

Consideremos una pieza formada por varios materiales de forma que las interficies entre ellos sean paralelas a la directriz de la pieza. Esto es, como se muestra en la Figura 4.39, la sección recta de la pieza está dividida en varias zonas Ω_i, correspondientes a un material que tiene un módulo elástico E_i, cada una de las cuales tiene un área A_i.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

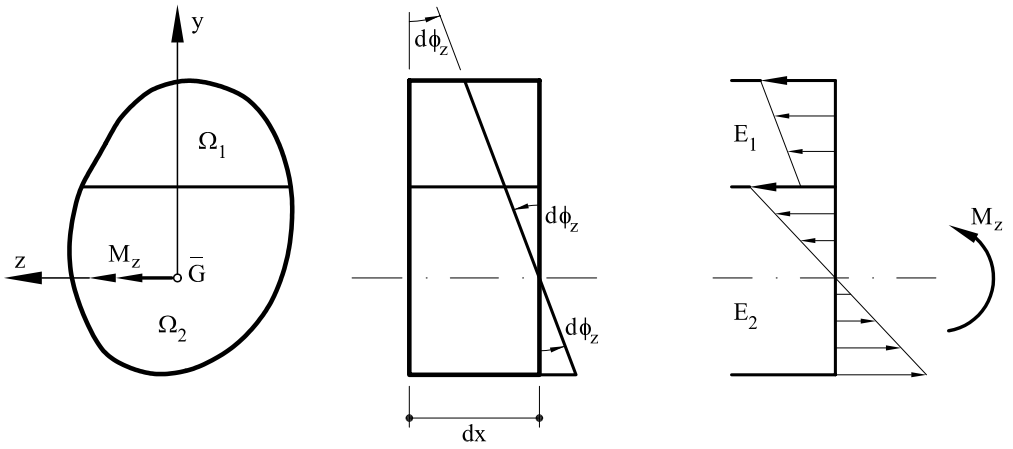

Fig. 4.39: Sección de varios materiales sometida a flexión

Sea una pieza de esta naturaleza en la que se han calculado las correspondientes características *mecánicas* (ver Sección A.2 del Apéndice A), sometida a flexión pura según uno de sus planos principales de inercia mecánica, por ejemplo, a un momento flector M_z contenido en el plano xy. Supongamos que la deformación de la pieza tiene lugar según la hipótesis de Bernouilli-Navier de manera análoga a como ocurre en las piezas de un único material (ver Figura 4.39). En este caso, las secciones permanecen planas en la deformación y la deformación longitudinal de una fibra será proporcional a la distancia $\widehat{y}$ de ésta al eje neutro, paralelo al eje z y de posición por ahora desconocida, es decir

$$\epsilon_x = -\frac{\widehat{y}}{\rho_z} \tag{4.55}$$

Si los distintos materiales de la sección cumplen la ley de Hooke, la tensión en una fibra será

$$\sigma_x = E\,\epsilon_x = n\,\overline{E}\,\epsilon_x \tag{4.56}$$

donde E y n son los del material de la fibra correspondiente. Al ser nulo el axil que actúa sobre la sección, la satisfacción de la correspondiente ecuación de equilibrio interno exige que:

$$N = \int_S \sigma_x\, dS = \int_S n\,\overline{E}\,\epsilon_x\, dS = -\frac{\overline{E}}{\rho_z}\int_S \widehat{y}\, n\, dS = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \int_S \widehat{y}\, n\, dS = 0 \tag{4.57}$$

lo que quiere decir que el eje neutro pasa por el centro mecánico de la sección, y coincide *necesariamente* con el otro eje principal de inercia mecánico de la sección (eje z), y $\widehat{y} \equiv y$.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Integrando el momento resultante de las tensiones respecto al eje neutro, se tendrá:

$$M_z = -\int_S \sigma_x \, y \, dS = \frac{\overline{E}}{\rho_z} \int_S y^2 \, n \, dS = \frac{\overline{EI_z}}{\rho_z} \tag{4.58}$$

de donde

$$\frac{1}{\rho_z} = \frac{M_z}{\overline{EI_z}} \tag{4.59}$$

expresión que se reduce a la ecuación (4.8) para secciones de un solo material.

Combinando las expresiones (4.56) y (4.59) se tiene que la tensión es un punto cualquiera de la sección vale:

$$\sigma_x = E \, \epsilon_x = -\, n \, \frac{M_z \, y}{\overline{I_z}} \tag{4.60}$$

La expresión anterior es el equivalente de la ley de Navier para secciones compuestas; en este caso, la ley de tensiones es lineal "a trozos", tal como se muestra en la Figura 4.39.

Vemos, por tanto, que las expresiones obtenidas para flexión recta de piezas de un único material pueden generalizarse al caso de piezas de varios materiales. Análogamente puede hacerse en el caso de flexión esviada.

Es necesario señalar que las expresiones anteriores son válidas si se cumplen dos requisitos básicos: (a) que la deformación de las secciones es plana (hipótesis de Bernoulli-Navier), y (b) que el comportamiento de los materiales es elástico lineal (ley de Hooke). Para que se cumpla el primer requisito es necesario que la unión entre los diferentes materiales de la pieza sea lo suficientemente rígida como para que ésta se comporte como tal, sin que se produzcan movimientos relativos en las interficies. Para que se cumpla el segundo requisito, el valor de las tensiones debe ser lo suficientemente bajo como para que no se produzcan fenómenos no lineales, tales como la fluencia plástica (en el caso del acero), o la fisuración a tracción o el aplastamiento a compresión (en el caso del hormigón).

Esto quiere decir que, en general, el estudio del comportamiento de piezas compuestas por varios materiales es un tema complejo fuera del alcance de este Libro, y que debe abordarse con las hipótesis y métodos adecuados a cada tipología.

Por ejemplo, las vigas de hormigón armado tienen un comportamiento muy diferente del aquí supuesto. La baja resistencia a tracción del hormigón, en relación a su resistencia a compresión, hace que la hipótesis de comportamiento elástico sea extremadamente conservadora. En la práctica, suele despreciarse completamente la capacidad del hormigón de resistir tensiones de tracción y se acepta un cierto grado de fisuración en los elementos estructurales. Consecuentemente, se adoptan métodos de diseño que

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

se basan en la *capacidad resistente total de las secciones* (por ejemplo, los diagramas momento-curvatura) y no en las *tensiones admisibles* de los materiales componentes. Asimismo, deben tomarse medidas para asegurar el comportamiento conjunto del hormigón y el acero: uso de barras corrugadas, cálculo de las longitudes de anclaje y de los recubrimentos mínimos, etc.

Otro tanto puede decirse de otras tipologías de vigas compuestas que se utilizan en la práctica, tales como las *vigas sandwich*, que se usan en industrias como la aeronaútica, donde se precisa alta resistencia y rigidez, a la vez que mínimo peso.

Ejemplo 4.6.1

La sección de una viga de hormigón armado es rectangular, de canto $h = 30$ cm y ancho $b = 20$ cm, y está armada con 4 redondos de acero de diámetro $\phi = 20$ mm colocados con un recubrimiento $r = 5$ cm, medido desde los centros de los redondos a la base de la viga. Los módulos elásticos del hormigón y del acero son $E_h = 25$ GPa y $E_a = 200$ GPa, respectivamente. Se pide calcular: (a) las características mecánicas de la sección, (b) las tensiones sobre el hormigón y el acero para un momento flector de eje horizontal $M_{\overline{z}} = 5$ kNm y (c) el momento positivo para el que se inicia la fisuración si la resistencia a tracción del hormigón es $f_t = 2$ MPa.

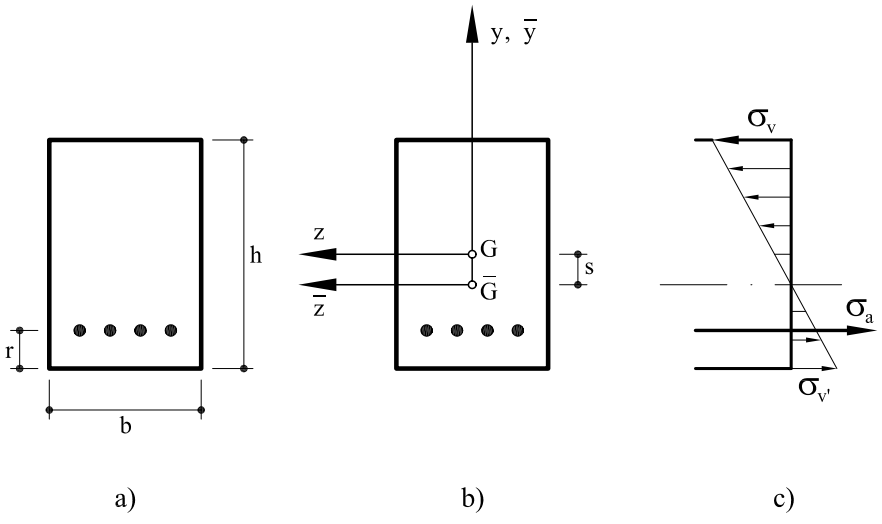

Fig. 4.40: Viga de hormigón armado del Ejemplo 4.6.1

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

(a) El área de acero es $A_a = 4 \times (\pi \cdot 2^2)/4 = 12,57$ cm^2. El área de hormigón es $A_h = b \cdot h - A_a = 587,43$ cm^2. Tomando como material de referencia el hormigón ($\overline{E} = E_h$), tenemos que el coeficiente de equivalencia del acero es $n_a = E_a/E_h = 8$. Además, el área homogeneizada de la sección vale $\overline{A} = A_h + n_a A_a = 688,0$ cm^2.

El centro mecánico de la sección está en (ver Figura 4.40b):

$$y_{\overline{G}} = \frac{600,0 \cdot 0 + (8-1) \cdot 12,57 \cdot (-10)}{688,0} = -1,272 \text{ cm}$$

medidos desde el centro geométrico del rectángulo de la sección. El momento mecánico de inercia respecto al eje principal mecánico horizontal (eje $\overline{z}$) es:

$$\begin{aligned} \overline{I_{\overline{z}}} &= \frac{1}{12} 20 \cdot 30^3 + 20 \cdot 30 \cdot (1,272)^2 + (8-1) \cdot 12,57 \cdot (8,722)^2 \\ &= 52.636,36 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

(b) Aplicando la fórmula (4.60) se tiene que las tensiones máximas en el hormigón son:

$$\begin{aligned} \sigma_v &= -\frac{5 \cdot 10^3 \cdot 16,27 \cdot 10^{-2}}{5,26 \cdot 10^{-4}} \text{ Pa} = -1,547 \text{ MPa} \\ \sigma_{v'} &= +\frac{5 \cdot 10^3 \cdot 13,73 \cdot 10^{-2}}{5,26 \cdot 10^{-4}} \text{ Pa} = +1,305 \text{ MPa} \end{aligned}$$

de compresión y tracción respectivamente. La tensión en el acero es

$$\sigma_a = +8 \cdot \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 8,73 \cdot 10^{-2}}{5,26 \cdot 10^{-4}} \text{ Pa} = +6,637 \text{ MPa}$$

La correspondiente distribución de tensiones se muestra en la Figura 4.40c.

(c) El momento que produce una tensión de 2 MPa en las fibras inferiores de la sección es

$$M_z^{\text{fis}} = \frac{\overline{I_{\overline{z}}}\, f_t}{v'} = \frac{5,26 \cdot 10^{-4} \cdot 2,0 \cdot 10^6}{13,73 \cdot 10^{-2}} \text{ N} \cdot \text{m} = 7,67 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Como puede observarse en este ejemplo, la exigencia de que el hormigón no fisure en una sección de hormigón armado solicitada a flexión es muy restrictiva. Para las solicitaciones que causan el inicio de la fisuración a tracción del hormigón, las tensiones de compresión del hormigón y las tensiones en el acero del armado son muy pequeñas, comparadas con sus respectivas tensiones admisibles. Por esta razón, es usual admitir en el dimensionamiento práctico de estructuras de hormigón armado que éste se fisure a tracción.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ejemplo 4.6.2

Se considera una sección mixta formada por una losa de hormigón de 100 cm de anchura y 20 cm de espesor hormigonada sobre un perfil metálico HEB 400 ($A_a = 197,8$ cm^2 y $I_a = 57.680$ cm^4). Los módulos elásticos del hormigón y del acero son $E_h = 25$ GPa y $E_a = 200$ GPa, respectivamente. Se pide calcular: (a) las características mecánicas de la sección, (b) la distribución de tensiones sobre el hormigón y el acero para un momento flector de $M_z = 500$ kN.m y (c) el momento positivo admisible si la tensión admisible a compresión del hormigón es $\sigma_h^* = 20$ MPa y la tensión admisible en el acero es de $\sigma_a^* = 200$ MPa.

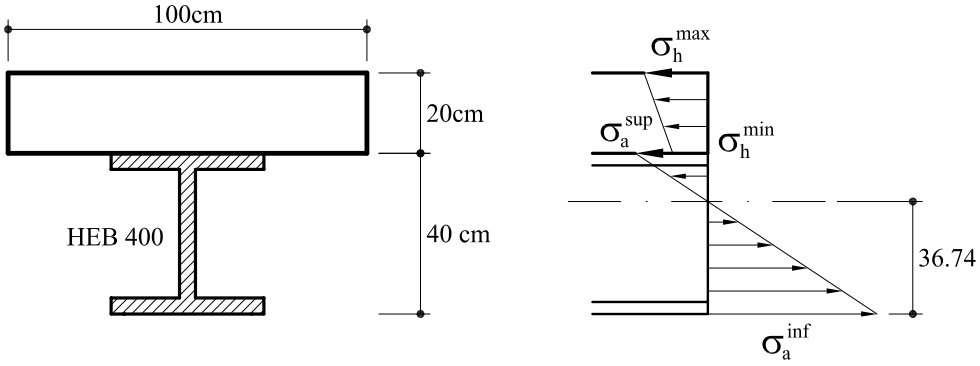

Fig. 4.41: Sección mixta del Ejemplo 4.6.2

(a) Tomando como material de referencia el hormigón ($\overline{E} = E_h$) tenemos que el coeficiente de equivalencia del acero es $n_a = E_a/E_h = 8$. Además, el área homogeneizada de la sección vale $\overline{A} = A_h + n_a A_a = 3.582,4$ cm^2.

El centro mecánico de la sección está en (ver Figura 4.41):

$$y_{\overline{G}} = \frac{2.000 \cdot 50 + 8 \cdot 197,8 \cdot 20}{3.582,4} = 36,74 \text{ cm}$$

medidos desde la base de la sección.

El momento mecánico de inercia respecto al eje de inercia principal horizontal z es:

$$\begin{aligned} \overline{I_z} &= \frac{1}{12}100 \cdot 20^3 + 100 \cdot 20 \cdot (13,26)^2 + 8 \cdot \left[57.680 + 197,8 \cdot (16,74)^2\right] \\ &= 1,323 \cdot 10^6 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

(b) Aplicando la fórmula (4.60) se tiene que las tensiones máxima y mínima en el hormigón son:

$$\sigma_h^{\max} = -\frac{500 \cdot 10^3 \cdot 23,26 \cdot 10^{-2}}{1,323 \cdot 10^{-2}} \text{ Pa} = -8,79 \text{ MPa}$$
$$\sigma_h^{\min} = -\frac{500 \cdot 10^3 \cdot \ 3,26 \cdot 10^{-2}}{1,323 \cdot 10^{-2}} \text{ Pa} = -1,23 \text{ MPa}$$

ambas de compresión. Las tensiones extremas en el acero son

$$\sigma_a^{\sup} = -8 \cdot \frac{500 \cdot 10^3 \cdot (+\ 3,26) \cdot 10^{-2}}{1,323 \cdot 10^{-2}} \text{ Pa} = -9{,}86 \text{ MPa}$$
$$\sigma_a^{\inf} = -8 \cdot \frac{500 \cdot 10^3 \cdot (-36,74) \cdot 10^{-2}}{1,323 \cdot 10^{-2}} \text{ Pa} = +111{,}08 \text{ MPa}$$

de compresión y tracción, respectivamente. La distribución de tensiones puede verse en la Figura 4.41.

(c) El momento admisible para el hormigón es el que produce una tensión de 20 MPa en las fibras superiores de la sección y vale

$$M_z^h = \frac{\overline{I_z}\ \sigma_h^*}{v} = \frac{1,323 \cdot 10^{-2} \cdot 20,0 \cdot 10^6}{23,26 \cdot 10^{-2}} \text{ N} \cdot \text{m} = 1.137,58 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El momento admisible para el acero es el que produce una tensión de 200 MPa en las fibras inferiores de la sección y vale

$$M_z^a = \frac{\overline{I_z}\ \sigma_a^* \,/\, n_a}{v'} = \frac{1,323 \cdot 10^{-2} \cdot 200,0 \cdot 10^6}{8 \cdot 36,74 \cdot 10^{-2}} \text{ N} \cdot \text{m} = 900,24 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El momento admisible es el mínimo de estos dos, $M_z^{\text{adm}} = 900,24$ kN·m, y el acero alcanza su tensión admisible antes que el hormigón.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

5 Flexión Compuesta

5.1 Introducción

Una pieza está sometida a *flexión compuesta* cuando sobre una sección genérica de la misma actúan simultáneamente un esfuerzo axil N (actuando en el baricentro G de la sección) y un momento flector $\overrightarrow{M}$ (ver Figura 5.1a).

Esta solicitación es estáticamente equivalente a una fuerza normal única de módulo N actuando sobre un punto P de la sección, de tal manera que el momento de esta fuerza respecto de G sea igual a $\overrightarrow{M}$, esto es

$$\overrightarrow{GP} \times \overrightarrow{N} = \overrightarrow{M} \tag{5.1}$$

Esto quiere decir que el punto P debe estar sobre la recta intersección del plano de solicitación a flexión con el plano de la sección (a' en la Figura 5.1b), que es obviamente perpendicular a la dirección del vector momento (a en la Figura 5.1), y a una distancia del centro de gravedad igual a la relación entre los módulos del momento y del axil; esto es

$$\overline{GP} = \frac{M}{N} \qquad ; \qquad \widehat{aGa'} = \frac{\pi}{2} \tag{5.2}$$

A la distancia $\overline{GP}$ se le llama *excentricidad*. Por este motivo a la flexión compuesta se le denomina también *tracción o compresión excéntrica*, según la fuerza normal N actuando en el punto P sea de tracción o compresión, respectivamente. El punto P de aplicación de la fuerza normal se llama *centro de presiones*; se llama *curva de presiones* al lugar geométrico de los centros de presiones de las distintas secciones de la pieza.

Tanto el esfuerzo axil como el momento flector producen tensiones normales sobre las secciones de la pieza, y el estudio de su distribución se sigue directamente de aplicar el principio de superposición a los resultados obtenidos en los apartados correspondientes al estudio del esfuerzo axil y del momento flector, respectivamente. En el presente Capítulo, estudiaremos primero el caso más intuitivo de *flexión compuesta recta* (esto

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

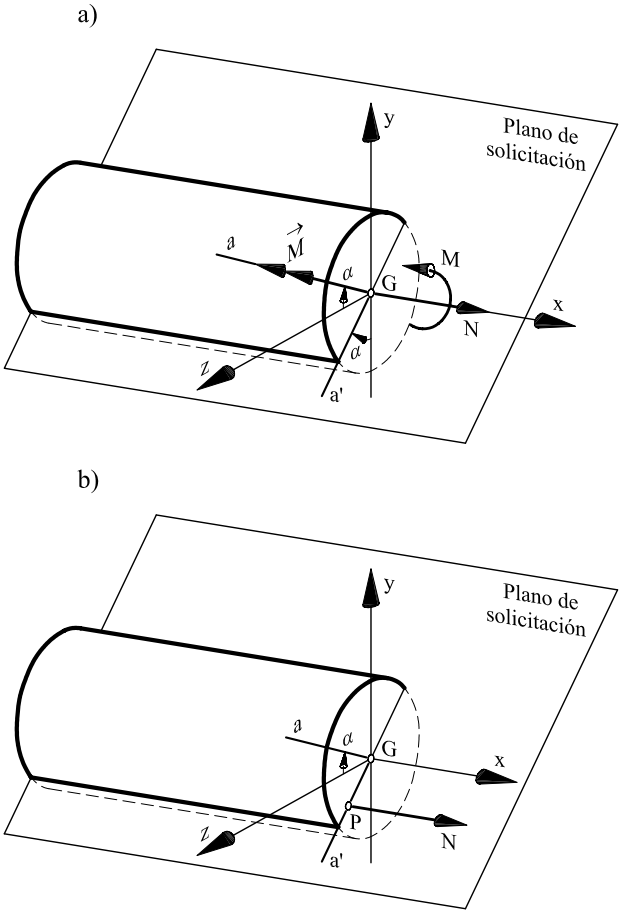

Fig. 5.1: Flexión compuesta: (a) axil y momento, (b) fuerza normal excéntrica

es, cuando el plano de solicitación a flexión coincide con uno de los planos principales de inercia de la sección), para llegar después al caso general de *flexión compuesta esviada* (esto es, secciones solicitadas a flexión en un plano cualquiera). Además, si el momento flector varía de sección a sección, actuará simultáneamente un esfuerzo cortante que dará lugar a tensiones tangenciales, tal como se verá en el capítulo siguiente.

Los estudios relacionados con la flexión compuesta datan de antiguo. El caso particular de flexión compuesta recta de una pieza de sección rectangular fue estudiado por Young, con resultados publicados en 1807. Sin embargo, el estudio general de la flexión compuesta se debe a J. A. C. Bresse, que lo publicó en 1859, en su libro sobre Resistencia de Materiales. Quizá muchos de los resultados se conocían anteriormente, incluso en 1840, y se enseñaban en la Ècole des Ponts et Chaussées de París.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

5.2 Flexión compuesta recta

Una sección está sometida a *flexión compuesta recta* cuando el sistema de esfuerzos que la solicita se reduce a un esfuerzo axil N y un momento flector M *contenido en un plano principal de inercia de la sección.*

Consideraremos en lo que sigue el caso de una viga de directriz rectilínea sometida a flexión compuesta recta. Sobre una de sus secciones actúa un esfuerzo axil de valor N y un momento flector que, a efectos de desarrollo, supondremos contenido en el plano principal de inercia que contiene a los ejes x e y; el vector momento tiene, por tanto, únicamente componente M_z, tal como se muestra en la Figura 5.2.

Abordamos el estudio utilizando el principio de superposición de efectos, tal como se muestra en la Figura 5.3. La deformación debida al axil se produce según la hipótesis de Bernoulli (las secciones rectas se trasladan manteniéndose planas y paralelas a sí mismas), mientras que la deformación por flexión se produce según la hipótesis de Bernoulli-Navier (las secciones rectas giran alrededor del eje neutro manteniéndose planas y perpendiculares a la deformada de la directriz).

Por superposición de efectos, una sección de la rebanada experimenta una traslación du, paralela al eje x (debida al axil), y un giro $d\phi_z$, alrededor del eje z (debido al flector), relativos a otra sección recta infinitamente próxima. Como puede observarse en la Figura 5.3, la composición de ambos movimientos, traslación más giro, equivale a un único giro alrededor de un *eje paralelo al* z cuya posición (punto O) se determinará más adelante.

La tensión normal que actúa sobre un punto genérico de la sección será también la suma de la tensión debida al axil y la debida al flector. Según la hipótesis de deformación supuesta y admitiendo, además, que se cumple la ley de Hooke, se tiene

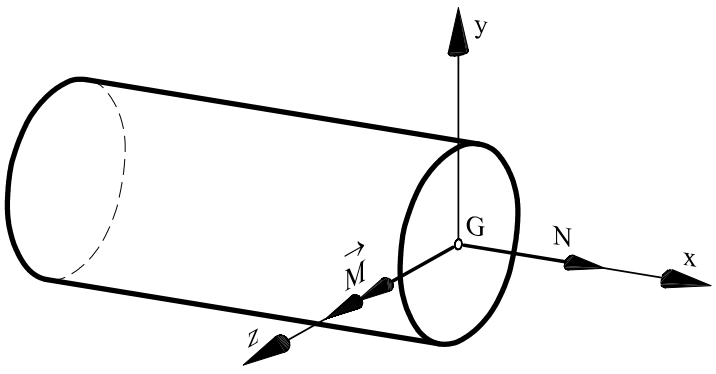

Fig. 5.2: Flexión compuesta recta

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

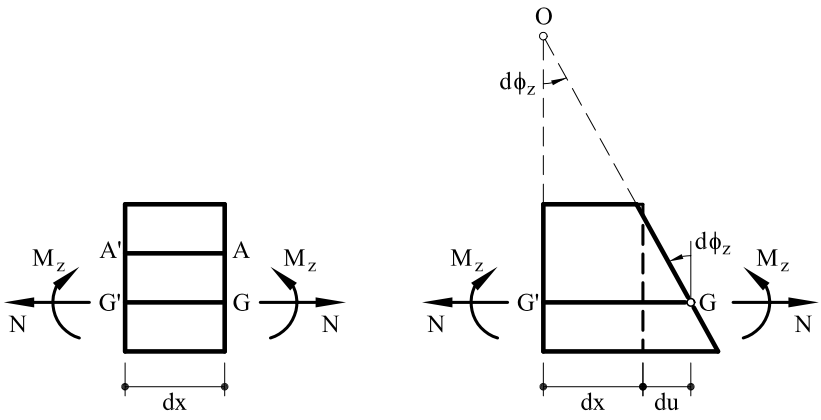

Fig. 5.3: Deformación de una rebanada sometida a flexión compuesta recta

que la tensión para un punto situado a una distancia y del eje z es:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z\, y}{I_z} \tag{5.3}$$

Por tanto, tal como se muestra en la Figura 5.4, la distribución de tensiones es lineal en la coordenada y, y las tensiones máximas se dan en las fibras de la sección más alejadas del eje z, y valen:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{A} - \frac{M_z\, v}{I_z} \\ \sigma_2 &= \frac{N}{A} + \frac{M_z\, v'}{I_z} \end{aligned} \tag{5.4}$$

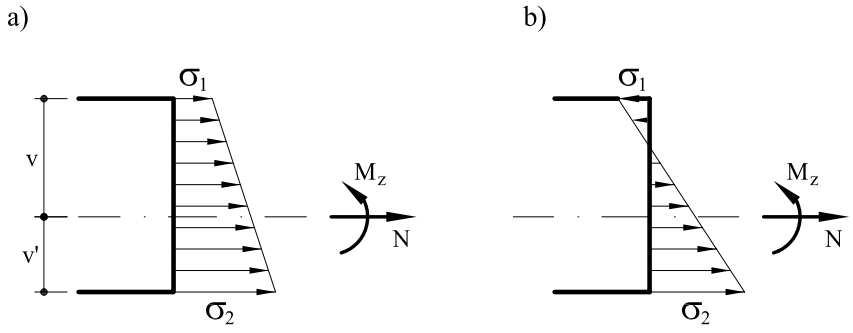

Fig. 5.4: Distribución de tensiones normales en flexión compuesta recta

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

donde v y v' son las distancias (en valor absoluto) del eje z a las dos fibras extremas, respectivamente. Obsérvese que según la magnitud relativa de los términos de la tensión correspondientes al axil y a la flexión, las tensiones en las fibras extremas pueden tener, o no, el mismo sentido que el axil. Así, en la Figura 5.4a todas las tensiones tienen el mismo signo que el esfuerzo axil, mientras que en la Figura 5.4b el flector tiene la magnitud suficiente como para hacer aparecer tensiones de signo contrario al del esfuerzo axil.

Como se explicó en la introducción a este tema, el axil N, aplicado en el baricentro de la sección G, más el momento M_z son un sistema de esfuerzos estáticamente equivalente a una fuerza excéntrica única de valor N aplicada en el punto P situado a una distancia e_y del baricentro, medida sobre el eje y, de tal manera que $M_z = -N\, e_y$ (una fuerza normal positiva con una excentricidad positiva equivale a un momento M_z negativo). Tal situación se muestra en la Figura 5.5.

Por tanto, la tensión en un punto genérico de la sección situado a una distancia y del eje principal z se puede expresar en la forma:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z\, y}{I_z} \tag{5.5a}$$

$$= \frac{N}{A} + \frac{N\, e_y\, y}{I_z} \tag{5.5b}$$

$$= \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_y\, y}{r_z^2}\right) \tag{5.5c}$$

donde $r_z = \sqrt{I_z/A}$ es el radio de giro de la sección respecto del eje z.

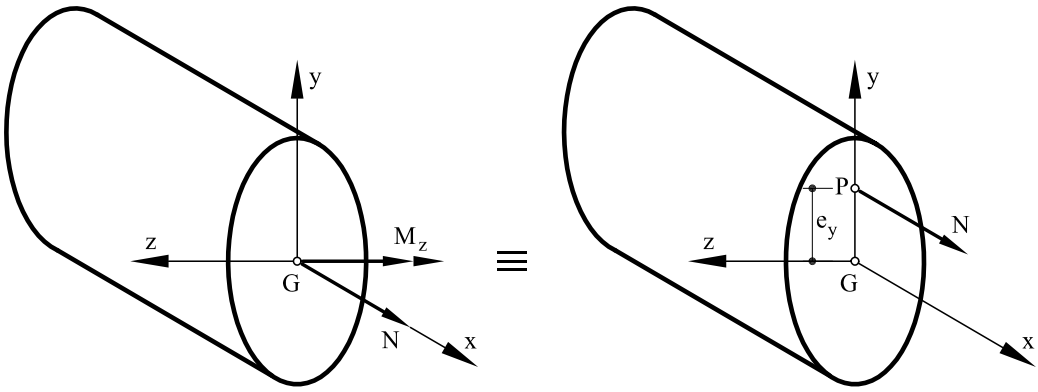

Fig. 5.5: Flexión compuesta recta como fuerza normal excéntrica

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Por definición, el eje neutro es el lugar geométrico de los puntos sometidos a tensión normal nula, luego su expresión es igual a:

$$1 + \frac{e_y\, y}{r_z^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{r_z^2}{e_y} \tag{5.6}$$

Se observa que el eje neutro nn' es una recta paralela al eje z (perpendicular a la traza del plano de solicitación), y su posición no depende del valor de la fuerza N, sino de la excentricidad e_y. Nótese que el punto de aplicación de la fuerza normal y el eje neutro están necesariamente en lados opuestos respecto al eje z. Nótese, asimismo, que cuanto menor es la excentricidad, mayor es la ordenada del eje neutro, esto es, cuanto mayor es, en términos relativos, el efecto del axil, más lejos está el eje neutro del eje z (es, por ejemplo, el caso de la Figura 5.4a); por el contrario, cuanto mayor es la excentricidad, menor es la ordenada del eje neutro, esto es, cuanto mayor es, en términos relativos, el efecto del flector, más cerca está el eje neutro del eje z (es, por ejemplo, el caso de la Figura 5.4b). La construcción gráfica de la Figura 5.6 para determinar la posición del eje neutro se deduce de la expresión (5.6).

Señalemos por último que, aunque en todo el desarrollo anterior se ha supuesto que la directriz de la pieza sometida a flexión compuesta es recta, muchos casos prácticos de interés conciernen a piezas de directriz inicialmente curva, como por ejemplo los arcos. Consideremos, por tanto, el caso de *piezas planas de pequeña curvatura,* es decir, aquellas piezas de directriz plana en las que la curvatura inicial, $\chi_o = 1/\rho_o$, es despreciable frente al canto de la pieza h, es decir, $h << \rho_o$. En este caso, puede

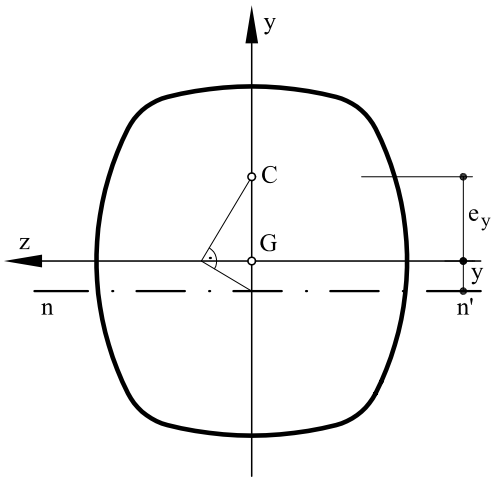

Fig. 5.6: Determinación gráfica del eje neutro en flexión compuesta recta

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

admitirse que la longitud inicial de las distintas fibras que forman la rebanada diferencial tienen aproximadamente la misma longitud. En consecuencia, se puede admitir que:

(a) la hipótesis de Bernouilli (alargamiento uniforme de las fibras) es válida en la deformación a axil, y

(b) la hipótesis generalizada de Bernouilli-Navier (elongación de las fibras proporcional a su distancia al eje neutro) es válida en la deformación a flexión.

Ambas hipótesis, junto con la aplicación del principio de superposición y de la ley de Hooke, permiten extender los resultados obtenidos para la flexión compuesta de piezas rectas al caso de piezas planas de pequeña curvatura, tanto en los casos de flexión recta como de flexión esviada.

Ejemplo 5.2.1

La viga biapoyada de la Figura 5.7a es de sección rectangular $b \times h$ ($A = bh$, $I_z = (1/12)\, bh^3$) y está sometida a un par de fuerzas F, de compresión, contenidas en el plano xy, vertical y de simetría de la pieza, y aplicadas en las secciones de apoyo, por encima de la directriz de la viga con una excentridad $e_y = e$. Obtener la distribución de tensiones en las secciones de la viga, sus valores máximos y mínimos y el valor máximo de la excentricidad para que la viga esté totalmente sometida a compresión.

Dada la solicitación de la viga, las leyes de esfuerzos son uniformes y, tal como se muestra en la Figura 5.7b, se tiene

$$N = -F \quad ; \quad M_z = F\, e$$

Por tanto, la viga está sometida a flexión compuesta recta. La distribución de tensiones es lineal y sólo depende de la altura de las fibras respecto del eje z. Así, los valores máximo y mínimo de las tensiones se dan en las fibras extremas ($y = \pm\, h/2$) y valen:

$$\sigma_v = -\frac{F}{bh} - \frac{Fe\frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = -\frac{F}{bh}\left(1+\frac{6e}{h}\right)$$

$$\sigma_{v'} = -\frac{F}{bh} + \frac{Fe\frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = -\frac{F}{bh}\left(1-\frac{6e}{h}\right)$$

Nótese que, para F de compresión y excentricidad positiva, la tensión en la fibra superior, σ_v, es necesariamente de compresión. Por otro lado, la tensión en la fibra inferior, $\sigma_{v'}$, será también de compresión si $e < h/6$, y de tracción en caso contrario. Las respectivas distribuciones de tensiones se muestran en las Figuras 5.7c y d.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

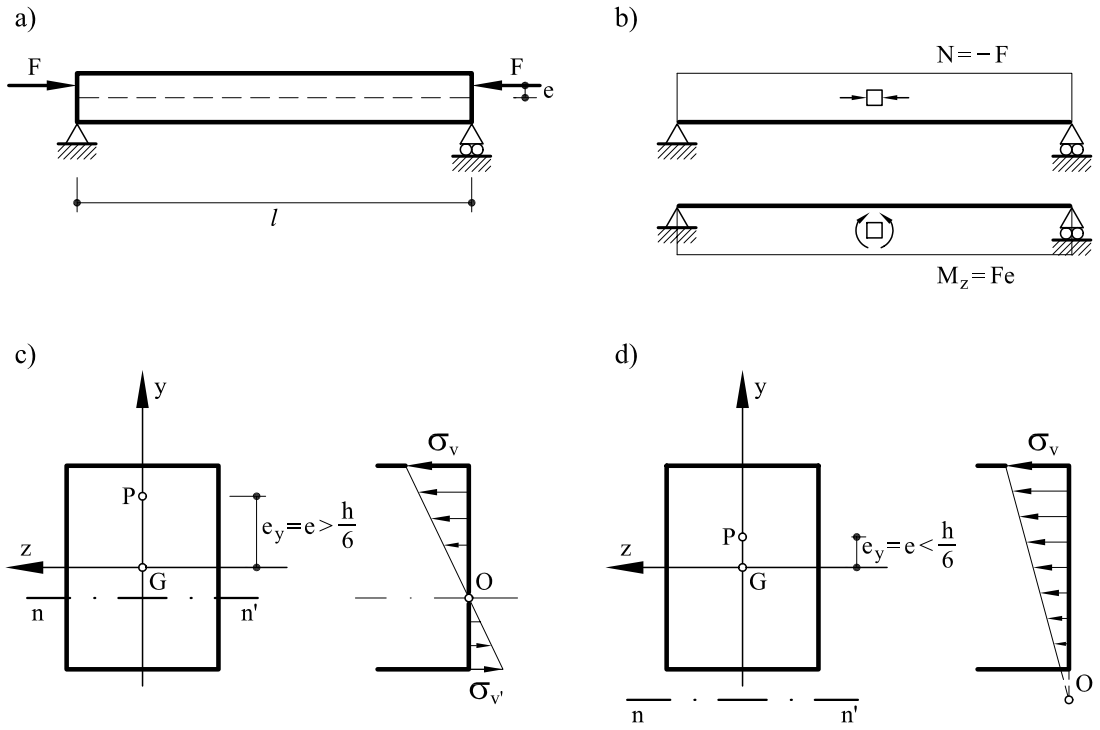

Fig. 5.7: Ejemplo 5.2.1

El eje neutro es una recta paralela al eje z, de ecuación:

$$y = -\frac{r_z^2}{e_y} = -\frac{I_z}{Ae_y} = -\frac{\frac{1}{12}bh^3}{bhe} = -\frac{1}{12}\frac{h^2}{e}$$

Para $e < h/6$ se tiene que $y > -h/2$, esto es, el eje neutro no corta a la sección. Para $e > h/6$ se tiene que $y < -h/2$, y el eje neutro corta a la sección.

Ejemplo 5.2.2

La viga biapoyada de la Figura 5.8a es de sección rectangular $b \times h$ ($A = bh$, $I_z = (1/12)\, bh^3$) y está sometida a una carga vertical descendente, uniformemente distribuida de valor p, y a un par de fuerzas F, de compresión, aplicadas en los centros de gravedad de las secciones de apoyo. Obtener: (a) la curva de presiones de la pieza, (b) el valor mínimo de las fuerzas F para que no haya tracciones en la pieza y (c) la distribución de tensiones en las secciones $x = 0$, $l/4$ y $l/2$, para este valor de F.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

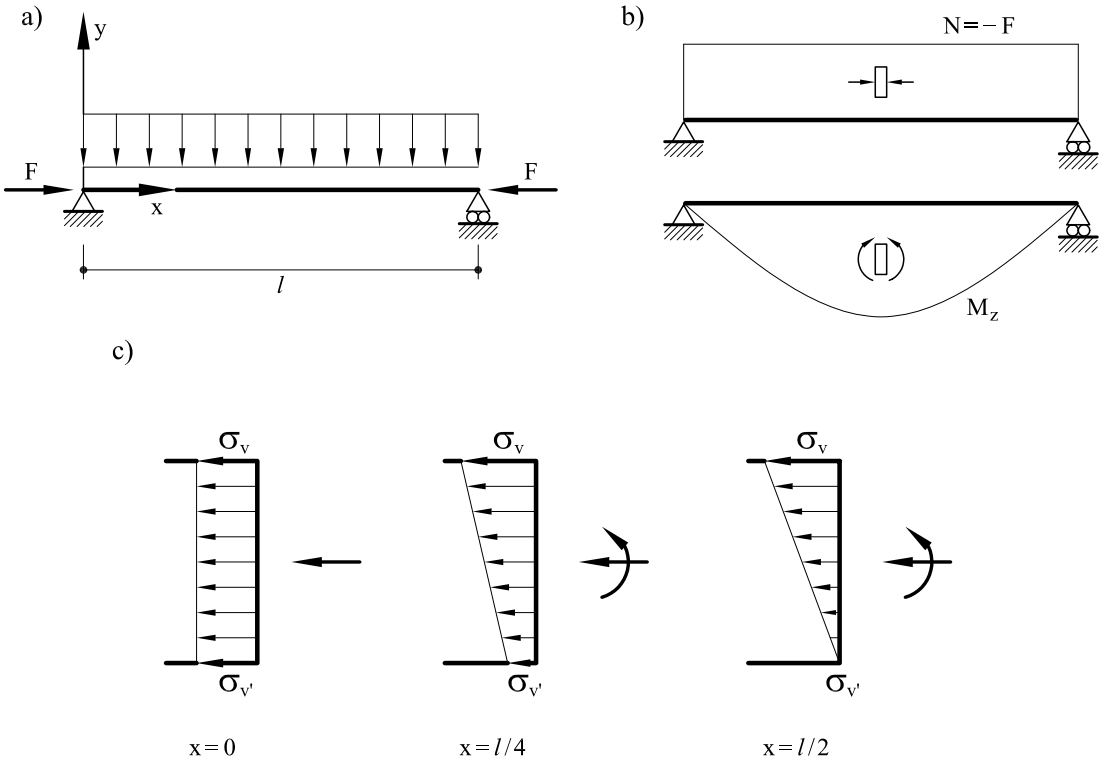

Fig. 5.8: Ejemplo 5.2.2

(a) Dada la solicitación de la viga, las leyes de esfuerzos son, tal como se muestra en la Figura 5.8b:

$$N(x) = -F \quad ; \quad M_z(x) = \frac{p}{2}\, x\, (\, l - x\,)$$

Por tanto, la viga está sometida a flexión compuesta recta. La curva de presiones es una curva en el plano xy, cuya expresión viene determinada por la posición de los centros de presiones de cada sección. Así,

$$e_y(x) = -\,\frac{M_z(x)}{N(x)} = \frac{p}{2F}\, x\, (\, l - x\,)$$

que es una parábola con valor máximo $e_y(x = l/2) = pl^2/8F$.

(b) La sección más crítica, a efectos de que aparezcan tracciones, es la sección central, que soporta el momento flector máximo, o sea, a la que corresponde una mayor excentricidad. Según el ejercicio anterior, no aparecerán tracciones en la fibra inferior

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

de la sección central si la excentricidad en esta sección es menor que $h/6$, o sea:

$$e_y(x = l/2) = pl^2/8F < \frac{h}{6} \quad \Longrightarrow \quad F > \frac{3}{4}\frac{pl^2}{h}$$

(c) La distribución de tensiones en las secciones $x = 0$, $l/4$ y $l/2$, para el valor $F = 3pl^2/4h$ se muestra en la Figura 5.8c. En la sección $x = 0$ el momento flector es nulo, $e_y = 0$ y, por tanto, la distribución de tensiones es uniforme y de valor

$$\sigma_v(x = 0) = \sigma_{v'}(x = 0) = -\frac{F}{bh} = -\frac{3}{4}\frac{pl^2}{bh^2}$$

En la sección $x = l/4$ se tiene $M_z = (3/32)pl^2$ y $e_y = (3/32)(pl^2/F) = h/8$. Las tensiones extremas valdrán

$$\sigma_v\,(x = l/4) = -\frac{F}{bh}\left(1+\frac{6e}{h}\right) = -\frac{7}{4}\frac{F}{bh} = -\frac{21}{16}\frac{pl^2}{bh^2}$$
$$\sigma_{v'}(x = l/4) = -\frac{F}{bh}\left(1-\frac{6e}{h}\right) = -\frac{1}{4}\frac{F}{bh} = -\frac{3}{16}\frac{pl^2}{bh^2}$$

Al ser $e < h/6$, las tensiones son todas de compresión. En la sección $x = l/2$ se tiene $M_z = pl^2/8$ y $e_y = pl^2/8F = h/6$. Las tensiones extremas valdrán

$$\sigma_v\,(x = l/2) = -\frac{F}{bh}\left(1+\frac{6e}{h}\right) = -2\frac{F}{bh} = -\frac{3}{2}\frac{pl^2}{bh^2}$$
$$\sigma_{v'}(x = l/2) = -\frac{F}{bh}\left(1-\frac{6e}{h}\right) = 0$$

y se comprueba que no hay tracciones en punto alguno de la pieza.

Ejemplo 5.2.3

Un pilar de sección rectangular $b \times h$ (30×40 cm^2) y longitud $l = 3$ m soporta una fuerza de compresión $F = 100$ kN ligeramente inclinada, según muestra la Figura 5.9. Calcular: (a) las leyes de esfuerzos en la pieza; (b) posición del eje neutro en cada sección; (c) tensiones normales máximas en cada sección.

Las características geométricas de la sección son:

$$A = 30 \cdot 40 = 1.200\,\text{cm}^2 \qquad ; \qquad I_z = \frac{1}{12}\,30 \cdot 40^3 = \ 160.000\ \text{cm}^4$$

y, por tanto, $r_z^2 = I_y/A = 133,33$ cm. Además, se conoce el ángulo de inclinación de la fuerza, $\gamma = \arctan(h/2l) = \arctan 1/15 \simeq 1/15$, que puede considerarse pequeño.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

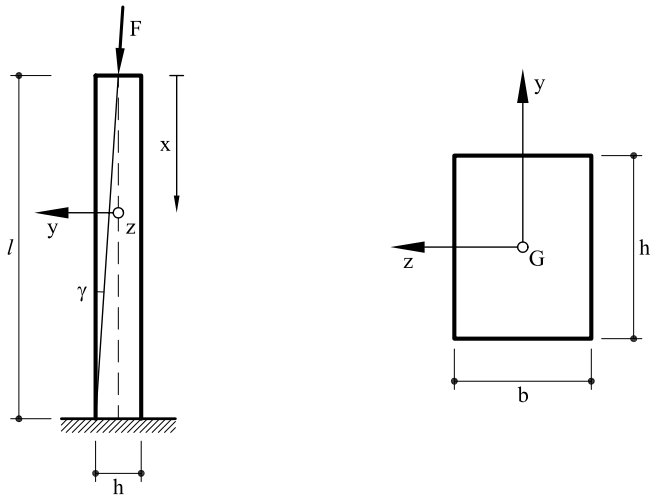

Fig. 5.9: Ejemplo 5.2.3

(a) leyes de esfuerzos en la pieza

Las secciones están sometidas a flexión compueta recta, con el centro de presiones situado sobre el eje y de cada sección. La excentricidad de la fuerza en función de la distancia x de la sección considerada al extremo superior del pilar es:

$$e_y(x) = x \tan\gamma = \frac{h}{2}\frac{x}{l}$$

Por tanto, las leyes de esfuerzos son:

$$\begin{aligned} N(x) &= -F\cos\gamma & &\simeq -F \\ T_y(x) &= +F\sin\gamma & &\simeq +F\frac{h}{2l} \\ M_z(x) &= +F\cos\gamma\, e_y(x) & &\simeq +F\frac{h}{2}\frac{x}{l} \end{aligned}$$

El esfuerzo axil es constante a lo largo de la pieza, mientras que el flector crece linealmente con x.

(b) posición del eje neutro en cada sección

El eje neutro de cada sección es paralelo al eje z de cada sección, y corta al eje y en la ordenada:

$$a\,(x) = -\frac{r_z^2}{e_y\,(x)} = -6,66\,\frac{l}{x}\ \text{cm}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Por tanto, el eje neutro se acerca al centro de gravedad a medida que crece la relación x/l, tal como se muestra en la Figura 5.10.

(c) tensiones máximas en cada sección

Las tensiones en un punto cualquiera de la pieza son:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}\left(1+\frac{e_y\, y}{r_z^2}\right) = \frac{N}{A}\left(1-\frac{y}{a(x)}\right)$$

Conocida la posición del eje neutro es fácil ver que las distribuciones de tensiones serán como las dibujadas en la Figura 5.10 para las secciones $x/l = 0,5$ y $x/l = 1$. Las máximas compresiones se producen en las fibras superiores (como la A o la B), y valen:

$$\sigma_c^{\max}(x) = \frac{N}{A}\left(1+\frac{20}{6,666}\frac{x}{l}\right) = \frac{N}{A}\left(1+3\frac{x}{l}\right)$$

y, entonces, $\sigma_c^{\max}\,(x/l = 0,5) = -2{,}083$ MPa y $\sigma_c^{\max}\,(x/l = 1) = -3{,}333$ MPa. Las máximas tracciones se producen en las fibras inferiores (como la C o la D), y valen:

$$\sigma_t^{\max}(x) = \frac{N}{A}\left(1-\frac{20}{6,666}\frac{x}{l}\right) = \frac{N}{A}\left(1-3\frac{x}{l}\right)$$

y, entonces, $\sigma_t^{\max}\,(x/l = 0,5) = 0{,}4167$ MPa y $\sigma_t^{\max}\,(x/l = 1) = 1{,}667$ MPa.

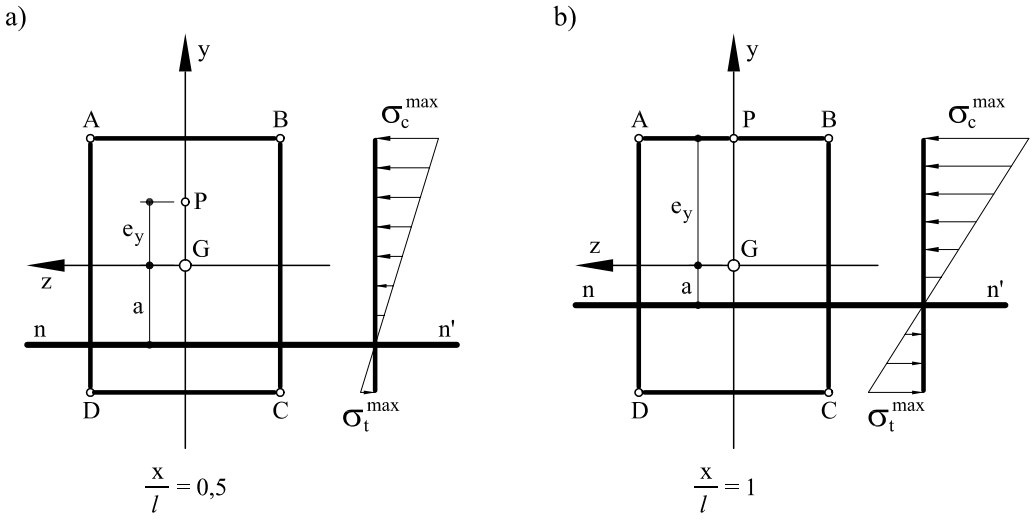

Fig. 5.10: Resultados del Ejemplo 5.2.3

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

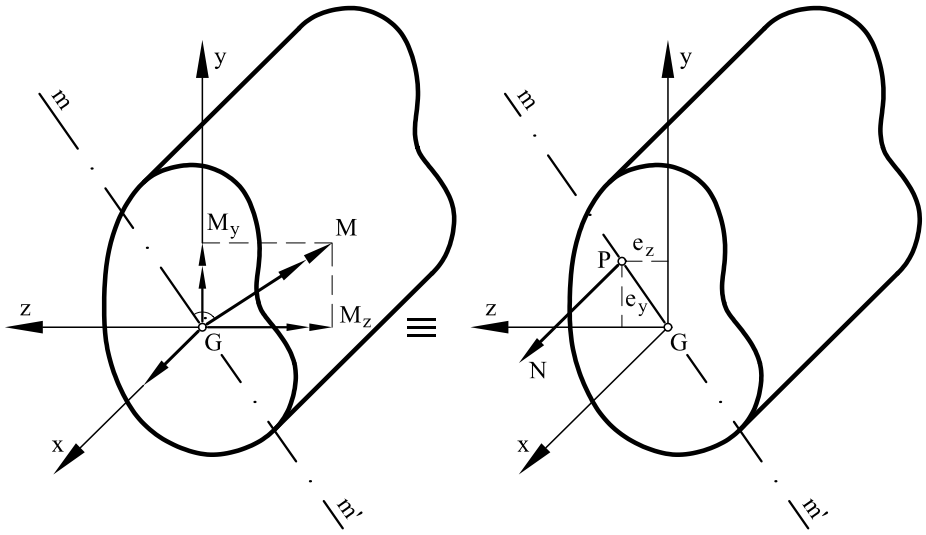

Fig. 5.11: Flexión compuesta esviada

5.3 Flexión compuesta esviada

Se dice que una pieza está solicitada a *flexión compuesta esviada* cuando sobre sus secciones actúa un sistema de esfuerzos que se reduce a un esfuerzo axil N y un momento flector M contenido en un plano *distinto* de los planos principales de flexión de la pieza, es decir, tal que el vector momento *no coincide* con ninguno de los ejes principales de inercia de las secciones (ver Figura 5.11a). El esfuerzo axil y el momento son estáticamente equivalentes a una sola fuerza normal N excéntrica, no contenida en ninguno de los planos principales de inercia (Figura 5.11b).

Abordaremos en esta Sección el estudio de este tipo de solicitación, primero referido a los ejes principales de inercia de la sección, y luego, directamente referida al eje neutro.

5.3.1 Estudio en ejes principales

Consideremos una pieza recta sometida a flexión compuesta esviada bajo la acción de un esfuerzo axil N y un momento flector $\overrightarrow{M}$, esviado respecto de los ejes principales de inercia de la sección (ver Figura 5.11a). Descomponiendo el vector momento flector $\overrightarrow{M}$ en sus dos componentes según los ejes principales de inercia de la sección, se tienen las componentes del vector momento según dichos ejes M_z y M_y.

De forma análoga a lo descrito en flexión compuesta recta, la deformación de la rebanada puede deducirse de aplicar el principio de superposición. Así, la deformación

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

debida al axil se produce según la hipótesis de Bernoulli (las secciones rectas se trasladan manteniéndose planas y paralelas a sí mismas), mientras que la deformación por flexión se produce según la hipótesis de Bernoulli-Navier (las secciones rectas giran alrededor del eje neutro manteniéndose planas y perpendiculares a la deformada de la directriz). Por superposición de efectos, una sección de la rebanada experimenta una traslación du, paralela al eje x (debida al axil), un giro $d\phi_z$, alrededor del eje z (debido al flector M_z), y un giro $d\phi_y$, alrededor del eje y (debido al flector M_y), relativos a otra sección recta infinitamente próxima. La composición de estos movimientos equivale a un único giro alrededor del *eje neutro,* cuya posición se determinará más adelante.

El valor de las tensiones normales en un punto genérico de la sección, de coordenadas (y, z) respecto de los ejes principales, puede obtenerse también aplicando el principio de superposición. En este caso, se superponen las tensiones obtenidas para esfuerzo axil a las correspondientes a flexión esviada, en la forma:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z\, y}{I_z} + \frac{M_y\, z}{I_y} \tag{5.8}$$

Obsérvese que, de acuerdo a la hipótesis de deformación de Bernoulli-Navier y a la ley de Hooke, la distribución de tensiones es lineal en las coordenadas y, z.

Por otra parte, el axil N, aplicado en el baricentro de la sección G, más el momento $\overrightarrow{M}$ son un sistema de esfuerzos estáticamente equivalente a una fuerza excéntrica única de valor N aplicada en el centro de presiones P, cuya posición respecto de los ejes principales $P(e_y, e_z)$ viene dada por las relaciones:

$$M_y = N\, e_z \qquad ; \qquad M_z = -N\, e_y \tag{5.9}$$

o bien,

$$e_z = \frac{M_y}{N} \qquad ; \qquad e_y = -\frac{M_z}{N} \tag{5.10}$$

En flexión compuesta esviada, el centro de presiones P no está situado sobre ninguno de los ejes principales. La dirección $\overline{GP}$ (o mm' en la Figura 5.11), ortogonal al vector momento, es la traza del plano de solicitación. Según lo anterior, la tensión en un punto genérico de la sección puede expresarse también como:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z\, y}{I_z} + \frac{M_y\, z}{I_y} \tag{5.11a}$$

$$= \frac{N}{A} + \frac{N\, e_y\, y}{I_z} + \frac{N\, e_z\, z}{I_y} \tag{5.11b}$$

$$= \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_y\, y}{r_z^2} + \frac{e_z\, z}{r_y^2}\right) \tag{5.11c}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

donde $r_z = \sqrt{I_z/A}$ y $r_y = \sqrt{I_y/A}$ son los radios de giro de la sección respecto a los ejes (y, z), respectivamente.

Por definición, el *eje neutro* es el lugar geométrico de los puntos que tienen tensión normal nula. Por tanto, igualando a cero la expresión que permite calcular las tensiones se obtiene la ecuación del eje neutro:

$$1 + \frac{e_y\, y}{r_z^2} + \frac{e_z\, z}{r_y^2} = 0 \tag{5.12}$$

Obviamente, ésta es la ecuación de una recta contenida en el plano yz. Dicha recta *no pasa* por el centro de gravedad de la sección y, en general, *no es perpendicular* a la traza del plano de solicitación (dirección mm').

Si se llama A y B a los puntos de intersección del eje neutro con los ejes (y, z), respectivamente, se tiene:

$$\text{para } z = 0 \;\Rightarrow\; y = a = -\frac{r_z^2}{e_y} \qquad \text{siendo } a \text{ la ordenada del punto } A$$

$$\text{para } y = 0 \;\Rightarrow\; z = b = -\frac{r_y^2}{e_z} \qquad \text{siendo } b \text{ la abcisa del punto } B$$

Debe observarse que si el centro de presiones P se acerca al centro de gravedad de la sección G, esto es, la excentricidad disminuye, el momento flector tiene menor importancia relativa y el eje neutro se aleja de la sección, estando toda ella sometida a tracción o compresión, según sea el signo de la fuerza normal N. En efecto, para $e_y, e_z \to 0$, $a, b \to \infty$. Por el contrario, si P se aleja de G, esto es, la excentricidad aumenta, la flexión tiene mayor importancia relativa, el eje neutro se acerca al centro de gravedad de la sección e intersecta a la sección dividiéndola en dos zonas, una traccionada y otra comprimida ($e_y, e_z \to \infty$, $a, b \to 0$).

La construcción gráfica de la Figura 5.12 para determinar el eje neutro se deduce de las expresiones anteriores.

Comparando la ecuación del eje neutro con la expresión de la elipse central de inercia de la sección:

$$\frac{y^2}{r_z^2} + \frac{z^2}{r_y^2} = 1 \tag{5.13}$$

se observa que existe una interesante relación geométrica entre el centro de presiones $P(e_y, e_z)$ y el eje neutro, que puede enunciarse diciendo que *el eje neutro es la recta antipolar del centro de presiones respecto a la elipse central de inercia de la sección.* Esta propiedad, ya señalada por Bresse en 1859, permite las construcciones gráficas de la Figura 5.13 para determinar el eje neutro, según el centro de presiones sea exterior o interior a la elipse central de inercia de la sección, respectivamente.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

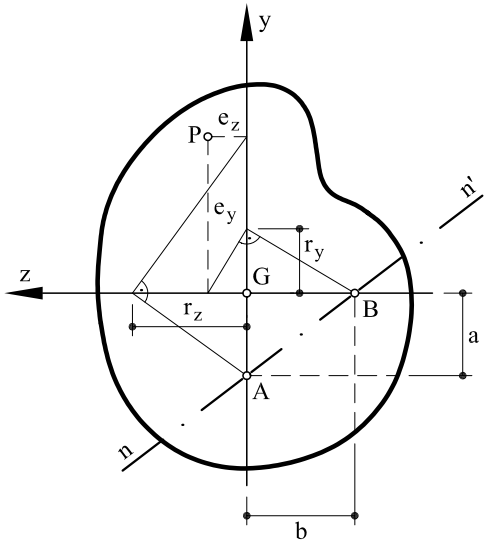

Fig. 5.12: Determinación gráfica del eje neutro en flexión compuesta esviada

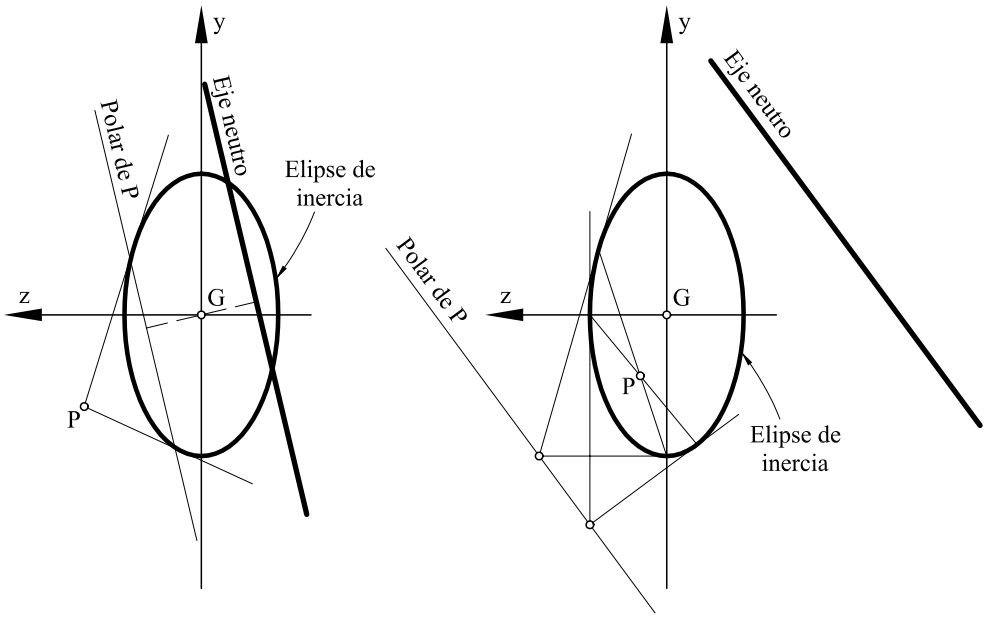

Fig. 5.13: Determinación gráfica del eje neutro a partir del centro de presiones y la elipse central de inercia de la sección

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

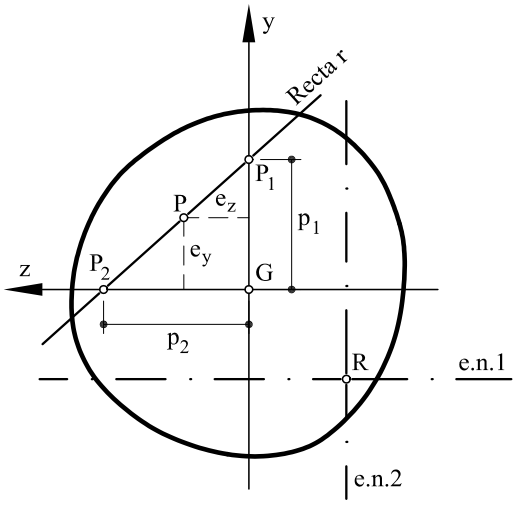

Fig. 5.14: Centro de presiones que se desplaza sobre una recta

Demostraremos, a continuación, una propiedad que resulta útil a la hora de determinar el núcleo central de una sección (ver Sección 5.5): si el centro de presiones P se desplaza a lo largo de una recta r, los ejes neutros correspondientes a las sucesivas posiciones de P son rectas que giran alrededor de un punto R. Dicho punto R es el antipolo de la recta r respecto a la elipse central de inercia de la sección (Figura 5.14).

En efecto, supongamos que la recta r, sobre la cual se mueve el centro de presiones P, corta a los ejes principales en los puntos P_1 y P_2, cuyas distancias al centro de gravedad son p_1 y p_2, respectivamente. Por tanto, su ecuación, en forma canónica, es:

$$\frac{y}{p_1} + \frac{z}{p_2} = 1 \tag{5.14}$$

Cuando la posición de P coincide con los puntos P_1 y P_2, estamos en sendos casos de flexión compuesta recta, y los respectivos ejes neutros serán paralelos a los ejes principales de inercia, y de ecuaciones:

$$y = -\frac{r_z^2}{p_1}, \text{ para } P \equiv P_1 \quad ; \quad z = -\frac{r_y^2}{p_2}, \text{ para } P \equiv P_2 \tag{5.15}$$

Estas dos rectas se cortan en un punto $R(y_R, z_R)$ que tiene por coordenadas:

$$y_R = -\frac{r_z^2}{p_1} \quad ; \quad z_R = -\frac{r_y^2}{p_2} \tag{5.16}$$

y que es, precisamente, el antipolo de la recta r respecto a la elipse central de inercia. Esto prueba la propiedad enunciada para dos puntos particulares de la recta r.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Veamos ahora que para una situación en que una fuerza normal N actúe en un punto genérico P de la recta r, de coordenadas $C(e_y, e_z)$, el eje neutro correspondiente pasa por el punto R. El principio de superposición asegura que los efectos de la fuerza N actuando en P son equivalentes a la acción de dos fuerzas normales N_1 y N_2, aplicadas en P_1 y P_2, respectivamente, tales que:

$$\frac{N_1}{N} = \frac{e_y}{p_1} \quad ; \quad \frac{N_2}{N} = \frac{e_z}{p_2} \tag{5.17}$$

ya que así se cumplen las relaciones:

$$M_y = +N_2\, p_2 = +N\, e_z \tag{5.18a}$$

$$M_z = -N_1\, p_1 = -N\, e_y \tag{5.18b}$$

Además, al estar el punto P sobre la recta r, se cumple que

$$N_1 + N_2 = N\, \left(\frac{e_y}{p_1} + \frac{e_z}{p_2}\right) = N \cdot 1 = N \tag{5.19}$$

Tanto N_1 aplicado en P_1, como N_2 aplicado en P_2, producen tensión normal nula en el punto R; por consiguiente, la superposición de ambas, equivalente a N aplicada en P, produce también tensión normal nula en R. Por tanto, el eje neutro pasa por R para una posición genérica de P sobre la recta r.

Ejemplo 5.3.1.1

Un pilar de sección rectangular $b \times h$ (30×40 cm^2) y longitud $l = 2,5$ m soporta una fuerza de compresión $F = 100$ kN ligeramente inclinada, según muestra la Figura 5.15. Calcular: (a) las leyes de esfuerzos en la pieza; (b) posición y dirección del eje neutro en cada sección; (c) tensiones máximas en cada sección.

Las características geométricas de la sección son:

$$A = 30 \cdot 40 = 1.200 \text{ cm}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12} 40 \cdot 30^3 = 90.000 \text{ cm}^4 \quad ; \quad r_y^2 = \frac{I_y}{A} = 75,00 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{1}{12} 30 \cdot 40^3 = 160.000 \text{ cm}^4 \quad ; \quad r_z^2 = \frac{I_z}{A} = 133,33 \text{ cm}$$

y, además, se conocen los ángulos:

$$\alpha = \arctan \frac{b}{h} = \arctan \frac{3}{4} \quad ; \quad \gamma = \arctan \frac{d/2}{l} = \arctan \frac{1}{10} \simeq \frac{1}{10}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

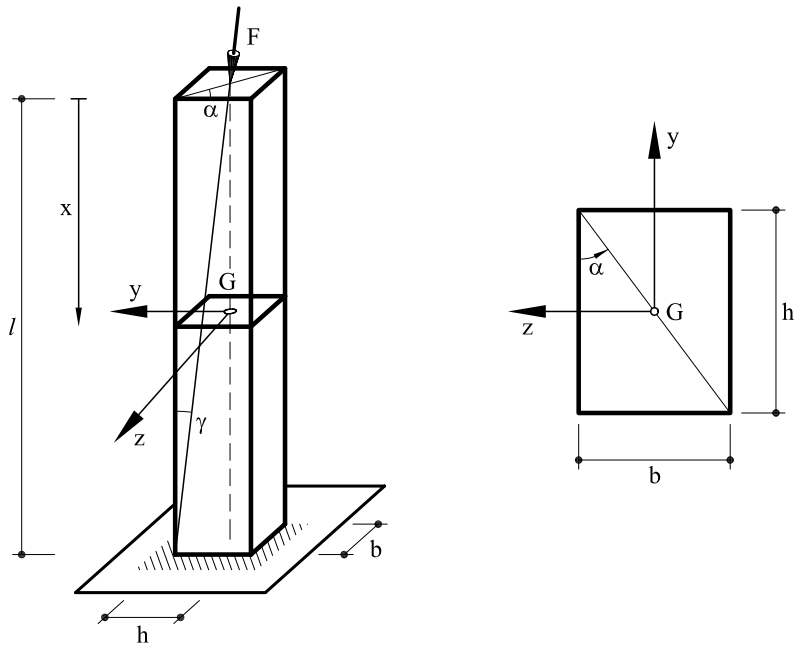

Fig. 5.15: Ejemplo 5.3.1.1

donde $d^2 = h^2 + b^2$.

(a) leyes de esfuerzos en la pieza

Calculemos primero las excentricidades de la carga en función de la distancia x de la sección considerada al extremo superior del pilar:

$$e_y(x) = \frac{h}{2}\frac{x}{l} \qquad ; \qquad e_z(x) = \frac{b}{2}\frac{x}{l}$$

por tanto, las leyes de esfuerzos son:

$$\begin{aligned}
N(x) &= -F\cos\gamma &&\simeq -F \\
T_y(x) &= +F\sin\gamma\cos\alpha &&\simeq +0,08F \\
T_z(x) &= +F\sin\gamma\,\sin\alpha &&\simeq +0,06F \\
M_y(x) &= -F\cos\gamma\, e_z(x) &&\simeq -F\frac{b}{2}\frac{x}{l} \\
M_z(x) &= +F\cos\gamma\, e_y(x) &&\simeq +F\frac{h}{2}\frac{x}{l}
\end{aligned}$$

El esfuerzo axil y los cortantes son constantes a lo largo de la pieza, mientras que los flectores crecen linealmente con x.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

(b) posición y dirección del eje neutro en cada sección

El eje neutro de cada sección corta a los ejes (y, z) de la sección en los puntos A y B, de coordenadas

$$a\,(x) = -\frac{r_z^2}{e_y\,(x)} = -6,66\frac{l}{x}\ \text{cm} \qquad ; \qquad b\,(x) = -\frac{r_y^2}{e_z\,(x)} = -5,00\frac{l}{x}\ \text{cm}$$

Por tanto, el eje neutro se acerca al centro de gravedad a medida que crece la relación x/l, según se muestra en la Figura 5.16.

(c) tensiones máximas en cada sección

Las tensiones en un punto cualquiera de la pieza son:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N}{A}\left(1+\frac{e_y\,y}{r_z^2}+\frac{e_z\,z}{r_y^2}\right) \\ &= \frac{N}{A}\left(1-\frac{y}{a(x)}-\frac{z}{b(x)}\right) \end{aligned}$$

Conocida la posición del eje neutro es fácil ver que las distribuciones de tensiones serán como las dibujadas en la Figura 5.16 para las secciones $x/l = 0,5$ y $x/l = 1$. La

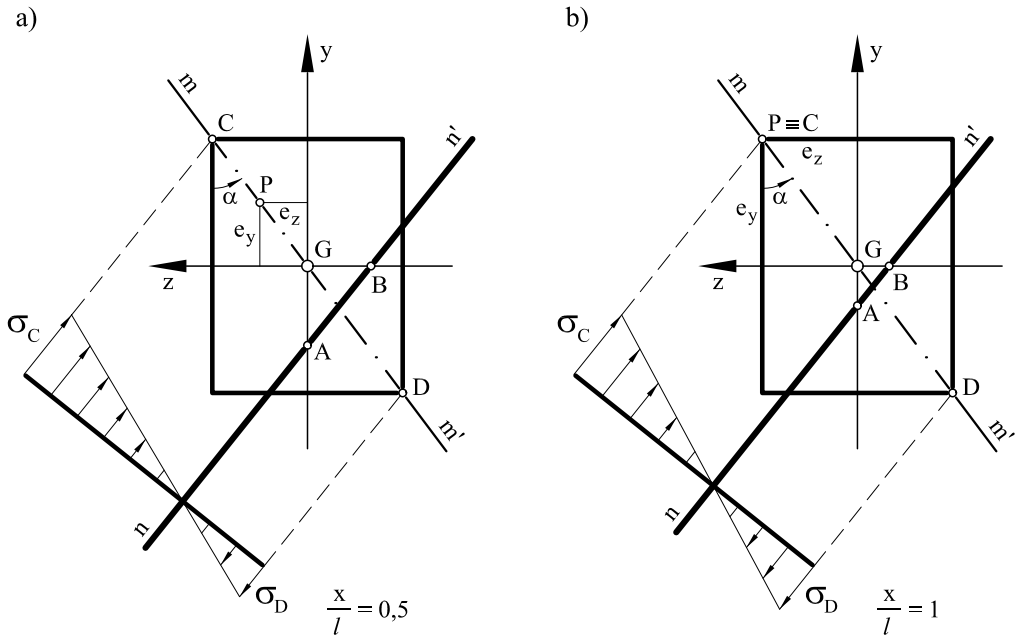

Fig. 5.16: Resultados del Ejemplo 5.3.1.1

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

máxima compresión se produce en el punto C, esquina superior izquierda, y vale:

$$\begin{aligned}\sigma_C(x) &= \frac{N}{A}\left(1+\left[\frac{20}{6,66}+\frac{15}{5,0}\right]\frac{x}{l}\right)\\ &= \frac{N}{A}\left(1+6,0\frac{x}{l}\right)\end{aligned}$$

y, entonces, $\sigma_C\,(x/l=0,5)=-3{,}333$ MPa y $\sigma_C\,(x/l=1)=-5{,}833$ MPa. La máxima tracción se produce en el punto D, esquina inferior derecha, y vale:

$$\begin{aligned}\sigma_D(x) &= \frac{N}{A}\left(1-\left[\frac{20}{6,66}+\frac{15}{5,0}\right]\frac{x}{l}\right)\\ &= \frac{N}{A}\left(1-6,0\frac{x}{l}\right)\end{aligned}$$

y, entonces, $\sigma_D\,(x/l=0,5)=1{,}667$ MPa y $\sigma_D\,(x/l=1)=4{,}167$ MPa.

Ejemplo 5.3.1.2

Una pieza de sección en Z está sometida a una fuerza normal de compresión $N=150$ kN, aplicada en el punto P de la Figura 5.17 (cotas en cm.). Calcular: (a) distribución de tensiones; (b) posición y dirección del eje neutro; (c) tensiones máximas, y (d) distribución de tensiones a lo largo del ala inferior.

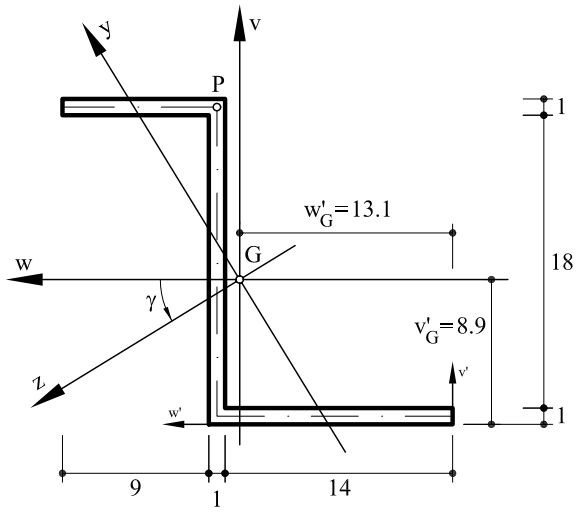

Fig. 5.17: Sección del Ejemplo 5.3.1.2

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Para comenzar se calculan las características geométricas de la sección. El área es:

$$A = 20 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 43,0 \text{ cm}^2$$

El baricentro de la sección está situado, con respecto a los ejes auxiliares (v', w'), en:

$$\begin{aligned} w'_G &= \frac{S_{v'}}{A} = \frac{15 \cdot 7,5 + 18 \cdot 14,5 + 10 \cdot 19}{43,0} = 13,10 \text{ cm} \\ v'_G &= \frac{S_{w'}}{A} = \frac{15 \cdot 0,5 + 18 \cdot 10 + 10 \cdot 19,5}{43,0} = 8,90 \text{ cm} \end{aligned}$$

Los momentos de inercia respecto a los ejes baricéntricos (v, w) son:

$$\begin{aligned} I_v &= \left[\frac{1 \cdot 9^3}{12} + 9 \cdot 1 \cdot (6,4)^2\right] + \left[\frac{20 \cdot 1^3}{12} + 20 \cdot 1 \cdot (1,4)^2\right] + \left[\frac{114^3}{12} + 14 \cdot 1 \cdot (6,10)^2\right] \\ &= 1.219,86 \text{ cm}^4 \\ I_w &= \left[\frac{9 \cdot 1^3}{12} + 9 \cdot 1 \cdot (10,6)^2\right] + \left[\frac{1 \cdot 20^3}{12} + 20 \cdot 1 \cdot (1,1)^2\right] + \left[\frac{14 \cdot 1^3}{12} + 14 \cdot 1 \cdot (8,4)^2\right] \\ &= 2.691,86 \text{ cm}^4 \\ I_{vw} &= 9 \cdot 1 \cdot 6,4 \cdot 10,6 + 20 \cdot 1 \cdot 1,1 \cdot 1,4 + 1 \cdot 14 \cdot (-8,4) \cdot (-6,1) \\ &= 1.358,72 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Los ejes principales de inercia de la sección se pueden determinar por:

$$\tan 2\gamma = \frac{2I_{vw}}{I_w - I_v} = \frac{2 \cdot 1.358,72}{2.691,86 - 1.219,86} = 1,846 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = 30,78^\circ$$

y los momentos de inercia respecto a los ejes principales de inercia son:

$$\begin{aligned} I_y &= I_v \cos^2\gamma + I_w \sin^2\gamma - I_{vw} \sin 2\gamma = 410,6 \text{ cm}^4 \\ I_z &= I_v \sin^2\gamma + I_w \cos^2\gamma + I_{vw} \sin 2\gamma = 3.501,0 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

La excentricidad del punto P es

$$e = \sqrt{e_v^2 + e_w^2} = \sqrt{(10,6)^2 + (1,4)^2} = 10,692 \text{ cm}$$

Se calcula el módulo del momento flector debido a la excentricidad de la carga:

$$M = N \cdot e = 150 \cdot 10^3 \cdot 10,692 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} = 16.038,1 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Este momento forma con el eje w un ángulo φ igual a:

$$\tan\varphi = \frac{1,4}{10,6} = 0,132 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 7,52^\circ$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

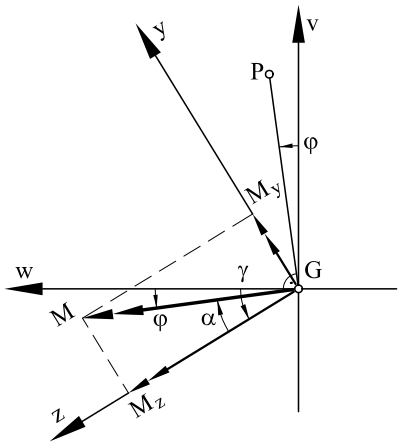

Fig. 5.18: Ejemplo 5.3.1.2: descomposición del momento según los ejes principales

Se descompone ahora el momento según los ejes principales de inercia (ver Figura 5.18):

$$\begin{aligned} M_y &= M\ \sin\alpha = M\ \sin(\gamma-\varphi) = 6.333,5\ \text{N.m} \\ M_z &= M\ \cos\alpha = M\cos(\gamma-\varphi) = 14.734,5\ \text{N.m} \end{aligned}$$

(a) Distribución de tensiones

Las tensiones normales pueden calcularse mediante la expresión:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N}{A} - \frac{M_z\, y}{I_z} + \frac{M_y\, z}{I_y} \\ &= -\frac{150\cdot 10^3}{43\cdot 10^{-4}} - \frac{14.734,5}{3.501\cdot 10^{-8}}\ y\cdot 10^{-2} + \frac{6.333,5}{410,6\cdot 10^{-8}}\ z\cdot 10^{-2}\ \ \text{Pa} \\ &= -34,884 - 4,2087\, y + 15,425\, z\ \ \text{MPa} \end{aligned}$$

donde las coordenadas (y, z) entran en cm.

(b) Eje neutro

Se obtiene la ecuación del eje neutro como lugar geométrico de los puntos que tienen tensión normal nula, es decir:

$$\sigma_x = 0 = -34,884 - 4,2087\, y + 15,425\, z$$

que puede escribirse en forma canónica como:

$$\frac{y}{-8,29} + \frac{z}{2,26} = 1$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

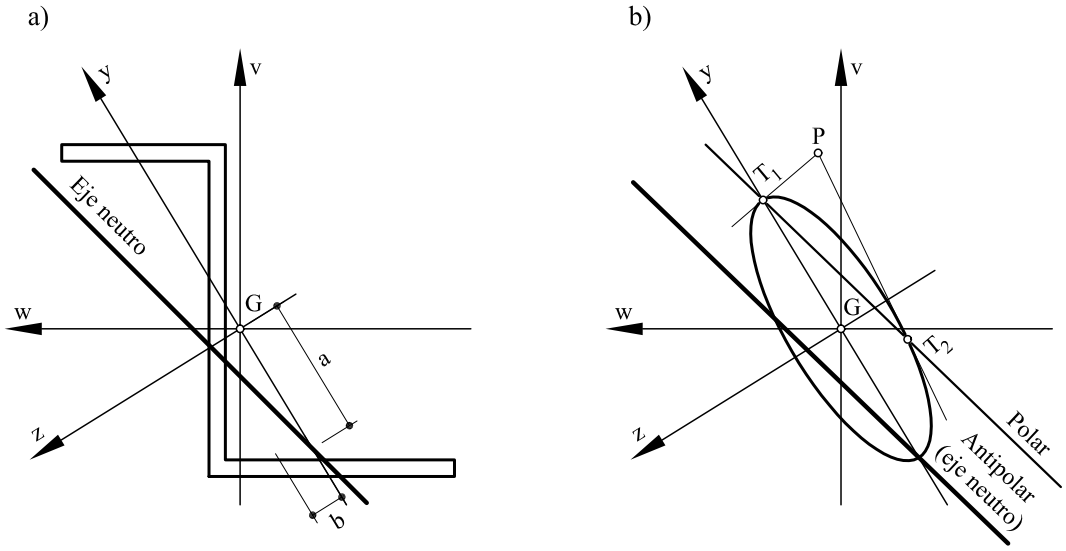

Fig. 5.19: Ejemplo 5.3.1.2: determinación del eje neutro

donde $a = -8,29\,\text{cm}$ y $b = 2,26\,\text{cm}$ son las coordenadas de los puntos de intersección del eje neutro con los ejes principales de inercia (Figura 5.19a). De la posición del centro de presiones, y puesto que el axil es de compresión, se deduce que hay tensiones de compresión a la derecha del eje neutro y tracciones a la izquierda de éste.

Sabiendo que la elipse central de inercia tiene semiejes $r_z = 9,02\,\text{cm}$ y $r_y = 3,09\,\text{cm}$ según los ejes (y, z) , respectivamente, puede obtenerse también la posición del eje neutro mediante la construcción gráfica de la Figura 5.19b. Obviamente, el resultado coincide con el calculado analíticamente.

(c) Tensiones máximas

Éstas se producen en los puntos más alejados del eje neutro que, según la Figura 5.20, son los puntos E y F, de coordenadas (en cm) $E(v, w) = (11,1; 0,9)$ y $F(v, w) = (-8,9; 1,9)$. Para calcular tensiones en estos puntos es necesario transformar primero sus coordenadas al sistema de ejes principales. Se usan para ello las relaciones:

$$\begin{aligned} y &= v\,\cos\gamma + w\,\sin\gamma \\ z &= -v\,\sin\gamma + w\,\cos\gamma \end{aligned}$$

donde γ es el ángulo que forman los ejes (y, z) con los ejes (v, w). Se obtienen así las coordenadas (en cm) $E(y, z) = (\,9,99; -4,91)$ y $F(y, z) = (-6,67;\, 6,19)$.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

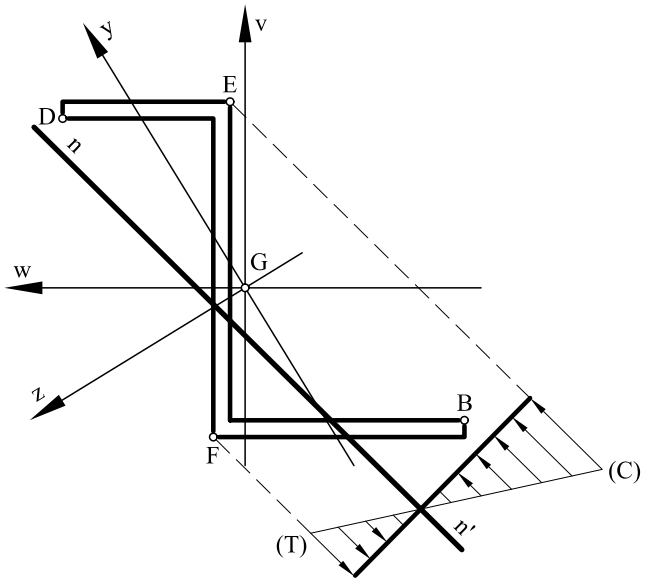

Fig. 5.20: Ejemplo 5.3.1.2: distribución de tensiones sobre la sección

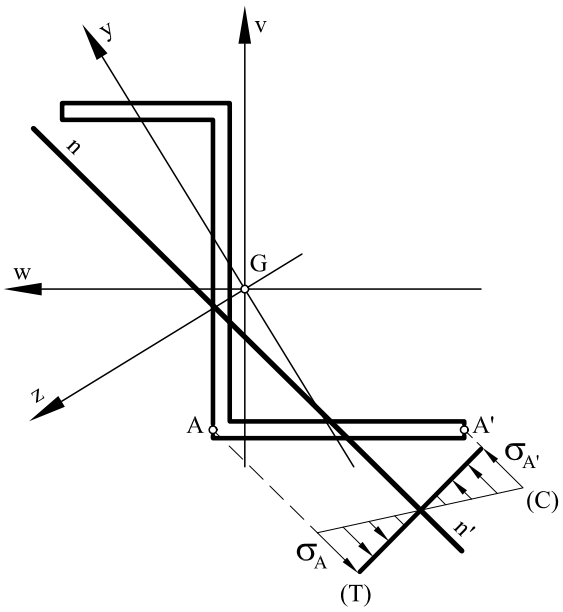

Fig. 5.21: Ejemplo 5.3.1.2: distribución de tensiones sobre el ala inferior

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Sustituyendo estas coordenadas en la ley de tensiones se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_E &= -34,884 - 4,2087 \cdot (+9,99) + 15,425 \cdot (-4,91) \text{ MPa} \\ &= -152,67 \text{ MPa (compresión)} \\ \sigma_F &= -34,884 - 4,2087 \cdot (-6,67) + 15,425 \cdot (+6,19) \text{ MPa} \\ &= +88,69 \text{ MPa (tracción)}\end{aligned}$$

Para los puntos $B(v,w) = (-7,9; -13,1)$ y $D(v,w) = (10,1; 10,9)$, que referidos a los ejes principales (y,z) son $B(y,z) = (-13,49; -7,21)$ y $D(y,z) = (14,25; 4,19)$, se tienen las tensiones:

$$\begin{aligned}\sigma_B &= -34,884 - 4,2087 \cdot (-13,49) + 15,425 \cdot (-7,21) \text{ MPa} \\ &= -89,32 \text{ MPa (compresión)} \\ \sigma_D &= -34,884 - 4,2087 \cdot (+14,25) + 15,425 \cdot (+4,19) \text{ MPa} \\ &= -30,23 \text{ MPa (compresión)}\end{aligned}$$

Puede observarse que las tensiones en estos dos puntos son menores que la tensión máxima de compresión que se produce en el punto E.

(d) Distribución de tensiones a lo largo del ala inferior

La distribución de tensiones a lo largo del ala inferior se obtiene trazando paralelas al eje neutro por el punto A y por el punto A', extremos de la misma (ver Figura 5.21). El valor de las tensiones normales en los puntos $A(v,w) = (-8,4; 1,9)$ y $A'(v,w) = (-8,4; 1,9)$ pueden calcularse sustituyendo los valores de sus coordenadas ($A(y,z) = (-6,24;\ 5,93)$, $A'(y,z) = (-13,92; -6,96)$) en la expresión de σ_x:

$$\begin{aligned}\sigma_A &= -34,884 - 4,2087 \cdot (-6,24) + 15,425 \cdot (+5,93) \text{ MPa} \\ &= +82,85 \text{ MPa (tracción)} \\ \sigma_{A'} &= -34,884 - 4,2087 \cdot (-13,92) + 15,425 \cdot (-6,96) \text{ MPa} \\ &= -83,66 \text{ MPa (compresión)}\end{aligned}$$

5.3.2 Estudio directo

El estudio directo de la flexión compuesta esviada puede acometerse invocando el principio de superposición y utilizando los resultados obtenidos en el estudio del esfuerzo axil y el estudio directo de la flexión pura esviada. Consideremos así la situación de la Figura 5.22a, en la que actúan sobre la sección un axil N, situado en el centro de gravedad, y un momento $\overrightarrow{M}$, contenido en el plano que tiene por traza la recta mm'.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

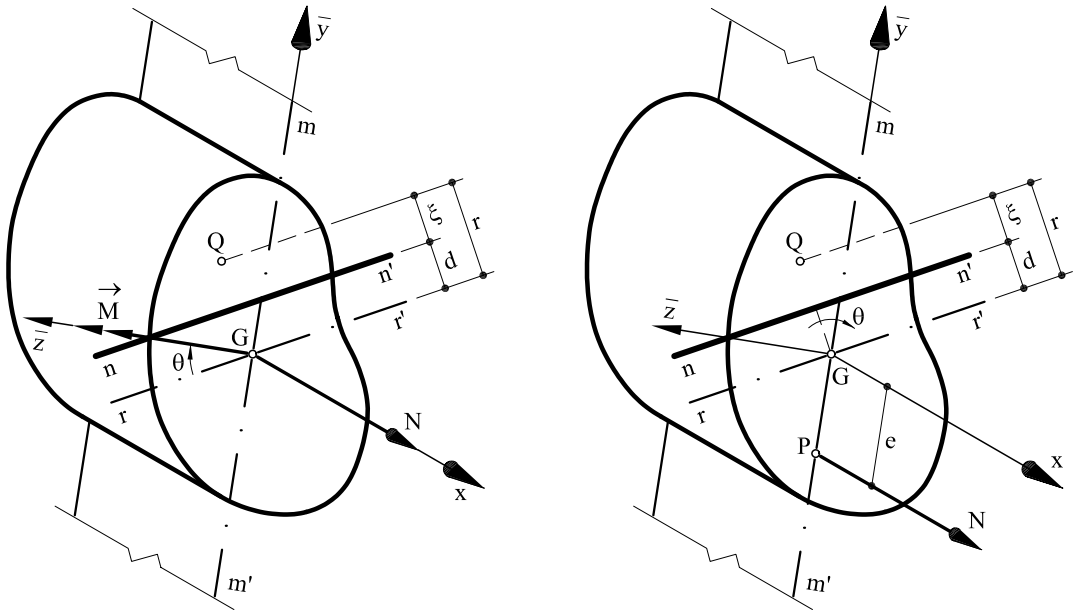

Fig. 5.22: Estudio directo de la flexión compuesta esviada

Llamaremos rr' a la recta que pasa por G y que tiene por dirección la que tendría el eje neutro correspondiente a la actuación del momento esviado $\overrightarrow{M}$. El ángulo de esviaje θ que forma el vector momento con la recta rr' se puede calcular como en la Sección 4.3.3 y resulta que

$$\tan\theta = -\frac{I_{\overline{yz}}}{I_{\overline{y}}} \tag{5.21}$$

donde los ejes $(\overline{y}, \overline{z})$ se corresponden con la traza del plano de solicitación y el vector momento respectivamente (ver Figura 5.22a).

Aplicando el principio de superposición a las expresiones obtenidas para el esfuerzo axil, por una parte, y en el estudio directo de la flexión esviada, por otra, se tiene que, conocida la dirección de la recta rr', la tensión normal en un punto genérico de la sección Q, situado a una distancia r de la recta rr', se puede calcular de la forma

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_{rr'}}{I_{rr'}} r \tag{5.22}$$

donde A es el área de la sección, $M_{rr'} = M\cos\theta$ es la proyección del momento M sobre la recta rr', $I_{rr'}$ es el momento de inercia de la sección respecto a dicha recta y r se toma positivo si el punto Q está en el lado en el que $M_{rr'}$ produce compresiones.

La mencionada situación de flexión compuesta puede también interpretarse como debida a la actuación de una fuerza normal N actuando en el centro de presiones P,

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

excéntrico, situado sobre la traza del plano de solicitación mm' y a una distancia e del centro de gravedad, tal que $M_{rr'} = M\cos\theta = -\,N\,e\,\cos\theta$ (donde N tiene signo y e sigue el convenio de signos de r), tal como se muestra en la Figura 5.22b. Entonces, la expresión (5.22) puede reescribirse como

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N\,e\cos\theta}{I_{rr'}}\,r \tag{5.23a}$$

$$= \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e\cos\theta}{r^2_{rr'}}\,r\right) \tag{5.23b}$$

donde $r_{rr'} = \sqrt{I_{rr'}/A}$ es el radio de giro de la sección respecto de la recta rr'.

A partir de la expresión (5.23b) puede obtenerse la ecuación del eje neutro nn' como

$$1 + \frac{e\cos\theta}{r^2_{rr'}}\,r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{r^2_{rr'}}{e\cos\theta} \tag{5.24}$$

Por tanto, el eje neutro nn' es paralelo a la recta rr', y está situado a una distancia $d = (r^2_{rr'}/\mid e\cos\theta\mid)$ de dicha recta y en el lado contrario de ésta que el centro de presiones. Este resultado justifica la construcción gráfica de la Figura 5.23.

Definiendo ξ como la distancia del punto Q al eje neutro, de forma que sea positiva si el punto Q y el baricentro G están del mismo lado del eje neutro, y negativa en caso contrario, la ecuación (5.23b) puede escribirse simplemente como:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}\,\frac{\xi}{d} \tag{5.25}$$

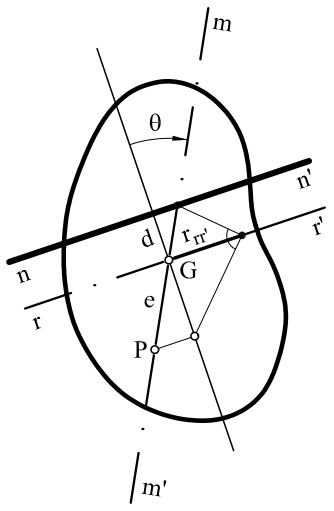

Fig. 5.23: Determinación gráfica de la posición del eje neutro

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

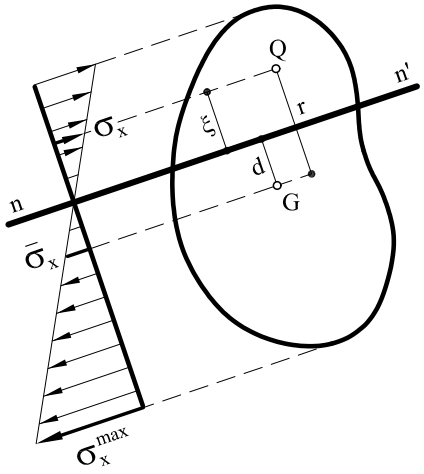

Fig. 5.24: Distribución de tensiones en flexión compuesta esviada

Se puede llegar al mismo resultado directamente a partir de la hipótesis de Bernoulli-Navier y de la ley de Hooke, ya que éstas implican una distribución lineal de tensiones, con valores proporcionales a la distancia al eje neutro. Así, observando la Figura 5.24, y llamando $\overline{\sigma}_x = N/A$ a la tensión en el baricentro, se tiene, por semejanza de triángulos, que:

$$\frac{\sigma_x}{\overline{\sigma}_x} = \frac{\xi}{d} \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \overline{\sigma}_x \, \frac{\xi}{d} = \frac{N}{A} \, \frac{\xi}{d} \tag{5.26}$$

La ecuación (5.25) es una expresión alternativa a la obtenida anteriormente (Ecs. (6.11b) y (6.12a)) y permite el cálculo directo de las tensiones en flexión compuesta conocida la posición del eje neutro.

Como puede observarse en la Figura 5.24, la tensión máxima se da en las fibras más alejadas del eje neutro y su valor es:

$$\sigma_x^{\max} = \frac{N}{A} \, \frac{\xi_{\max}}{d} \tag{5.27}$$

Ejercicio 5.3.2.1

Demostrar que la distribución de tensiones de la ecuación (5.25), obtenida en el estudio directo de la flexión compuesta esviada, es equivalente a la de ecuación (6.12a), obtenida en el estudio según los ejes principales de inercia.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Consideremos los ejes principales de inercia de la sección (y, z), tal como se muestran en la Figura 5.11. Tal como se demostró en la Sección 5.3.1, la ecuación del eje neutro, referida a dichos ejes, es:

$$1 + \frac{e_y\ y}{r_z^2} + \frac{e_z\ z}{r_y^2} = 0 \tag{5.28}$$

La distancia ξ de un punto Q de la sección, de coordenadas (y, z) referidas a los ejes principales, al eje neutro se puede calcular analíticamente como:

$$\xi = \frac{1 + \frac{e_y\ y}{r_z^2} + \frac{e_z\ z}{r_y^2}}{\sqrt{\left(\frac{e_y}{r_z^2}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{r_y^2}\right)^2}} \tag{5.29}$$

En particular, la distancia d del centro de gravedad $G(0, 0)$ al eje neutro es:

$$d = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{e_y}{r_z^2}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{r_y^2}\right)^2}} \tag{5.30}$$

Por tanto, la relación ξ/d es simplemente:

$$\frac{\xi}{d} = 1 + \frac{e_y\ y}{r_z^2} + \frac{e_z\ z}{r_y^2} \tag{5.31}$$

y la tensión en el punto Q es:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}\ \frac{\xi}{d} = \frac{N}{A}\ \left(1 + \frac{e_y\ y}{r_z^2} + \frac{e_z\ z}{r_y^2}\right) \tag{5.32}$$

lo que demuestra la equivalencia entre las dos expresiones obtenidas para la ley de tensiones.

Ejemplo 5.3.2.1

Una pieza de sección en Z está sometida a una fuerza normal de compresión $N = 150$ kN, aplicada en el punto P de la Figura 5.25 (cotas en cm.). Calcular, utilizando las fórmulas del estudio directo de la flexión compuesta esviada: (a) posición y dirección del eje neutro, (b) distribución de tensiones y tensiones máximas, y (c) distribución de tensiones a lo largo del ala inferior.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

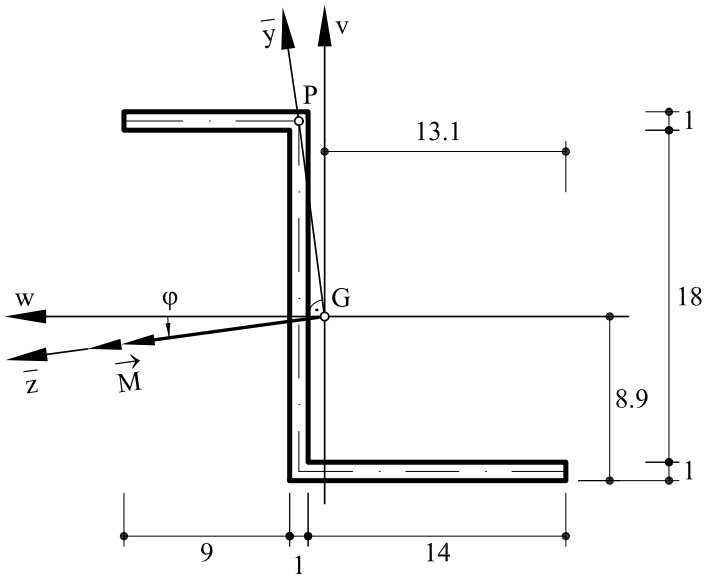

Fig. 5.25: Ejemplo 5.3.2.1

Los momentos de inercia de la sección respecto a los ejes baricéntricos (v, w) fueron calculados en el Ejemplo 5.3.1.2:

$$I_v = 1.219,86 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_w = 2.691,86 \text{ cm}^4 \quad ; \quad I_{vw} = 1.358,72 \text{ cm}^4$$

Calculamos ahora los momentos de inercia de la sección respecto de los ejes $(\overline{y}, \overline{z})$ definidos por la la traza del plano de solicitación GP y el vector momento, perpendicular a la anterior. El momento forma con el eje w un ángulo φ igual a:

$$\tan\varphi = \frac{1,4}{10,6} = 0,132 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 7,52^{o}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} I_{\overline{y}} &= \frac{I_v + I_w}{2} + \frac{I_v - I_w}{2}\cos 2\varphi - I_{vw}\sin 2\varphi \\ &= 1955,86 - 710,79 - 352,58 \\ &= 892,49 \text{ cm}^4 \\ I_{\overline{z}} &= \frac{I_v + I_w}{2} - \frac{I_v - I_w}{2}\cos 2\varphi + I_w \sin 2\varphi \\ &= 1955,86 + 710,88 + 352,578 \\ &= 3019,227 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

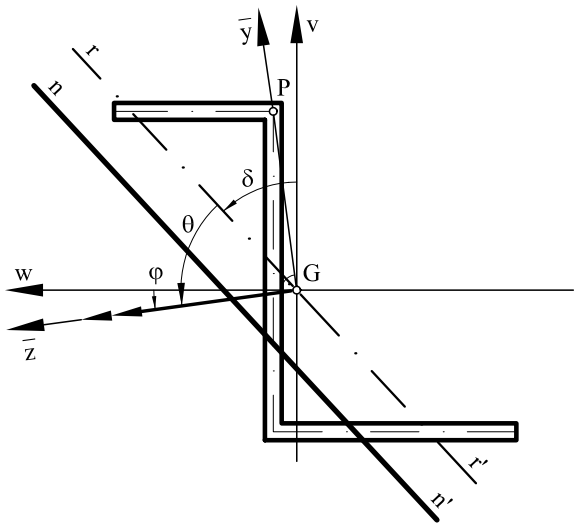

Fig. 5.26: Ejemplo 5.3.2.1: determinación de la posición del eje neutro

$$\begin{aligned} I_{\overline{yz}} &= \frac{I_v + I_w}{2}\sin 2\varphi + I_{vw}\cos 2\varphi \\ &= -190,987 + 1312,177 \\ &= 1121,19 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

(a) Posición y dirección del eje neutro

El ángulo de esviaje θ de la recta rr', paralela al eje neutro nn', con el vector momento, según el eje $\overline{z}$ (ver Figura 5.26), se calcula en la forma

$$\begin{aligned} \tan\theta &= -\frac{I_{\overline{yz}}}{I_{\overline{y}}} = -\frac{1121,19}{849,49} = -1,2562 \\ \theta &= -51,48^o \end{aligned}$$

Por tanto, el ángulo de la recta rr' respecto del eje v vale:

$$\delta = 90^o + \varphi + \theta = 90^o + 7,52^o - 51,48^o = 46,04^o$$

y el momento de inercia de la sección respecto del eje rr' vale:

$$\begin{aligned} I_{rr'} &= \frac{I_v + I_w}{2} + \frac{I_v - I_w}{2}\cos 2\delta - I_{vw}\sin 2\delta \\ &= 1955,86 - 26,713 - 1357,82 \\ &= 624,75 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

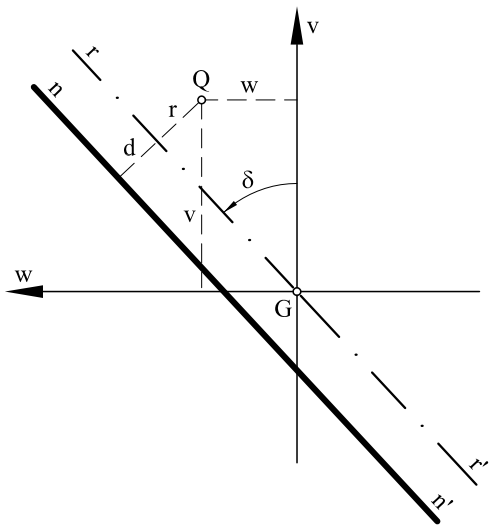

Fig. 5.27: Ejemplo 5.3.2.1: cálculo de las distancias al eje neutro

Puesto que el área de la sección es $A = 43,0$ cm^2, el radio de giro de ésta respecto del eje rr' vale:

$$r_{rr'}^2 = \frac{I_{rr'}}{A} = 14,529 \text{ cm}^2$$

La excentricidad del punto P es

$$e = \sqrt{e_v^2 + e_w^2} = \sqrt{(10,6)^2 + (1,4)^2} = 10,692 \text{ cm}$$

y, por tanto, la distancia del eje neutro nn' al eje rr' vale:

$$\begin{aligned} d &= \frac{r_{rr'}^2}{|e\cos\theta|} \\ &= \frac{14,529}{|10,692 \cdot \cos(-51,48^o)|} \\ &= 2,182 \text{ cm} \end{aligned}$$

(b) Distribución de tensiones y tensiones máximas

La distribución de tensiones es tal como se representó en la Figura 5.20, variando linealmente con la distancia al eje neutro. Las tensiones máximas se dan en los puntos más alejados de éste, es decir, en los puntos E y F.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Según se muestra en la Figura 5.27, la distancia ξ al eje neutro de un punto genérico de la sección Q, de coordenadas $Q(v, w)$, puede calcularse en función de la distancia d y el ángulo δ, en la forma:

$$\begin{aligned} \xi &= d + r \\ &= d + v \sin\delta - w \cos\delta \end{aligned}$$

Aplicando esta expresión a los puntos E y F, de coordenadas (en cm) $E(v, w) = (11,1; 0,9)$ y $F(v, w) = (-8,9; 1,9)$, se tiene $\xi_E = 9,547$ cm y $\xi_F = -5,543$ cm. Las tensiones en estos puntos son, según la ecuación (5.25):

$$\begin{aligned} \sigma_E &= \frac{-150 \cdot 10^3}{43 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{9,547}{2,182} \quad \text{Pa} = -152,63 \text{ MPa} \\ \sigma_F &= \frac{-150 \cdot 10^3}{43 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{(-5,543)}{2,182} \text{ Pa} = +88,62 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Si calculamos las tensiones en los puntos $B(v, w) = (-7,9; -13,1)$ y $D(v, w) = (10,1; 10,9)$, cuyas distancias al eje neutro son $\xi_B = 5,588$ cm y $\xi_D = 1,886$ cm, respectivamente, se tiene $\sigma_B = -89,33$ MPa y $\sigma_D = -30,15$ MPa. Puede observarse que las tensiones en estos dos puntos son menores que la tensión máxima de compresión que se produce en el punto E.

(c) Distribución de tensiones a lo largo del ala inferior

Las tensiones normales en los puntos $A(v, w) = (-8,4; 1,9)$ y $A'(v, w) = (-8,4; 1,9)$ también pueden calcularse sustituyendo los valores de sus distancias al eje neutro, $\xi_A = -5,183$ cm y $\xi_{A'} = 5,229$ cm, en la expresión de σ_x. Sustituyendo, se obtiene $\sigma_A = +82,86$ MPa y $\sigma_{A'} = -83,60$ MPa.

5.4 Secciones de varios materiales

Como en capítulos anteriores, consideremos una pieza formada por varios materiales de forma que las interficies entre ellos sean paralelas a la directriz de la pieza. Sean E_i los valores de los módulos de elasticidad de los diferentes materiales de la pieza, y sean $n_i = E_i/\overline{E}$ los correspondientes coeficientes de equivalencia respecto del módulo de elasticidad de referencia, $\overline{E}$. Consideremos, asimismo, conocidas las características *mecánicas* de las sección (ver Sección A.2 del Apéndice A): centro mecánico, área homogeneizada y momentos principales de inercia mecánicos.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Si una pieza de esta naturaleza está sometida a flexión compuesta recta su estudio puede realizarse aplicando el principio de superposición a los resultados obtenidos para la actuación del esfuerzo axil (Sección 3.3) y del momento flector (Sección 4.6). Así, por ejemplo, sumando las ecuaciones (3.18) y (4.64) se tiene que la tensión en un punto cualquiera de la sección vale:

$$\sigma_x = n \left(\frac{N}{\overline{A}} - \frac{M_z \; y}{\overline{I_z}} \right) \tag{5.33a}$$

$$= n \frac{N}{\overline{A}} \left(1 + \frac{e_y \; y}{\overline{r_z}^2} \right) \tag{5.33b}$$

donde $\overline{A}$ es el área homogeneizada, $\overline{I_z}$ es el momento principal de inercia mecánico respecto al eje z, $\overline{r_z}^2 = \overline{I_z} \; / \; \overline{A}$ es el radio de giro mecánico de la sección respecto al eje z, y $e_y = -M_z \; / \; N$ es la excentricidad.

Vemos, por tanto, que las expresiones obtenidas para flexión compuesta recta de piezas de un único material pueden generalizarse al caso de piezas de varios materiales. Análogamente puede hacerse en el caso de flexión esviada.

Ejemplo 5.4.1

La pieza de hormigón pretensado de la Figura 5.28a, de sección rectangular $b \times h$ ($h = 30$ cm, $b = 20$ cm) y longitud l ($l = 5$ m), se fabrica de la siguiente manera: (a) se tesan 4 redondos de acero de diámetro $\phi = 20$ mm, situados en horizontal, con una fuerza $F = 2,5$ kN cada uno, (b) se hormigona la sección rectangular de manera que los redondos tengan un recubrimiento $r = 5$ cm, medido desde los centros de los redondos a la base de la viga, y (c) una vez endurecido el hormigón se cortan los redondos por los extremos AA' y BB'. Los módulos elásticos del hormigón y del acero son $E_h = 25$ GPa y $E_a = 200$ GPa, respectivamente. Calcular: (a) la distribución de tensiones resultante del proceso de fabricación en el hormigón, (b) la tensión inicial en los redondos, (c) el acortamiento y la curvatura inicial de la pieza, (d) las tensiones sobre el hormigón y el acero para un momento flector de $M_z = 5$ kNm y (e) la curvatura final de la pieza.

El área de acero es $A_a = 4$ x $(\pi \cdot 2^2)/4 = 12,57$ cm^2. El área de hormigón es $A_h = 20 \cdot 30 - A_a = 587,43$ cm^2. Tomando como material de referencia el hormigón ($\overline{E} = E_h$), el coeficiente de equivalencia del acero es $n_a = E_a/E_h = 8$. Además, el área homogeneizada de la sección vale $\overline{A} = A_h + n_a A_a = 688,0$ cm^2.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

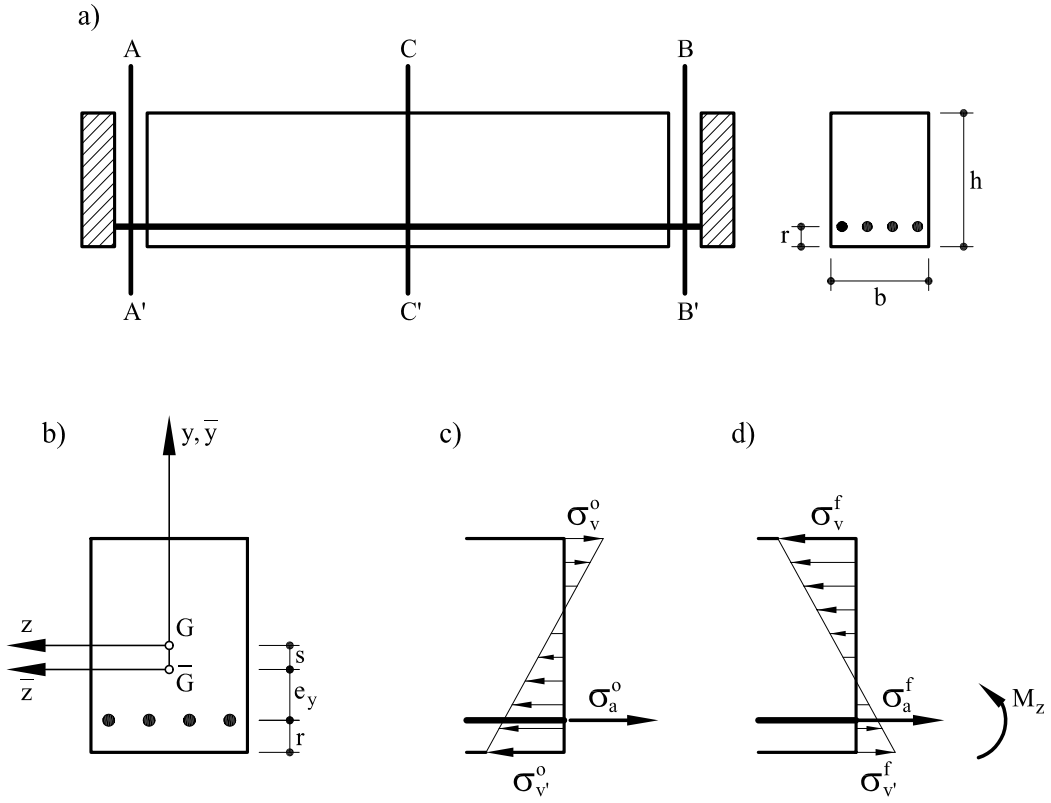

Fig. 5.28: Ejemplo 5.4.1

El centro mecánico de la sección está en (ver Figura 5.28b):

$$y_{\overline{G}} = \frac{600,0 \cdot 0 + (8-1) \cdot 12,57 \cdot (-10)}{688,0} = -1,272 \text{ cm}$$

medidos desde el centro geométrico del rectángulo de la sección. El momento mecánico de inercia respecto al eje $\overline{z}$ es:

$$\begin{aligned} \overline{I_{\overline{z}}} &= \frac{1}{12} 20 \cdot 30^3 + 20 \cdot 30 \cdot (1,272)^2 + (8-1) \cdot 12,57 \cdot (8,728)^2 \\ &= 52.636,36 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

(a) El hecho de cortar los redondos es equivalente a aplicar una fuerza de $4F = 10$ kN de compresión con una excentricidad de $e_y = -(h/2 - s - r) = -(15,0 - 1,272 - 5,0) = -8,728$ cm sobre las secciones extremas. Esto provoca un momento flector uniforme de valor $M_z = -N\, e_y = -(-10 \cdot 10^3) \cdot (-8,728 \cdot 10^{-2}) = -8,728 \cdot 10^2$ Nm.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Esta flexión compuesta produce en el hormigón una distribución lineal de tensiones tal que las tensiones máximas son:

$$\begin{aligned}\sigma_v^o &= \frac{-10\cdot 10^3}{688,0\cdot 10^{-4}} - \frac{\left(-8,728\cdot 10^2\right)\cdot\left(+16,27\cdot 10^{-2}\right)}{5,26\cdot 10^{-4}}\ \text{Pa}\\ &= +0,118\ \text{MPa}\\ \sigma_{v'}^o &= \frac{-10\cdot 10^3}{688,0\cdot 10^{-4}} - \frac{\left(-8,728\cdot 10^2\right)\cdot\left(-13,73\cdot 10^{-2}\right)}{5,26\cdot 10^{-4}}\ \text{Pa}\\ &= -0,373\ \text{MPa}\end{aligned}$$

de tracción y compresión, respectivamente.

(b) La tensión en el acero después del proceso de fabricación es

$$\begin{aligned}\sigma_a^o &= \frac{2,5\cdot 10^3}{3,142\cdot 10^{-4}}\\ &\quad + 8\cdot\left(\frac{-10\cdot 10^3}{688,0\cdot 10^{-4}} - \frac{\left(-8,728\cdot 10^2\right)\cdot\left(-8,728\cdot 10^{-2}\right)}{5,26\cdot 10^{-4}}\right)\ \text{Pa}\\ &= +5{,}635\ \text{MPa}\end{aligned}$$

donde el primer término corresponde a la tensión de pretensado y el segundo representa la pérdida de tensión al cortar los redondos.

La distribución de tensiones en la sección puede verse en la Figura 5.28c. Obsérvese que esta distribución de tensiones es autoequilibrada, al no actuar sobre la pieza solicitación exterior alguna.

(c) El acortamiento inicial de la pieza es

$$\Delta l^o = \frac{N\,l}{\overline{E}\,\overline{A}} = \frac{10\cdot 10^3\cdot 5}{25\cdot 10^9\cdot 688,0\cdot 10^{-4}}\ \text{m} = 2,91\cdot 10^{-5}\ \text{m}$$

y la curvatura inicial se puede calcular como

$$\chi_z^o = \frac{M_z\,l}{\overline{E}\,\overline{I_z}} = -\frac{10\cdot 10^3\cdot 8,728\cdot 10^{-2}\cdot 5}{25\cdot 10^9\cdot 5,26\cdot 10^{-4}}\ \text{m}^{-1} = -3,32\cdot 10^{-4}\ \text{m}^{-1}$$

lo que implica un radio de curvatura de $\rho_z^o = 3.014$ m, con el centro de curvatura por debajo de la pieza.

(d) La actuación de un momento flector positivo $M_z = 5$ kNm implica unos incrementos de tensión en el hormigón de

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_v &= -\frac{5\cdot 10^3\cdot 16,27\cdot 10^{-2}}{5,26\cdot 10^{-4}}\ \text{Pa} = -1,547\ \text{MPa}\\ \Delta\sigma_{v'} &= -\frac{5\cdot 10^3\cdot\left(-13,73\cdot 10^{-2}\right)}{5,26\cdot 10^{-4}}\ \text{Pa} = +1,305\ \text{MPa}\end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

de compresión y tracción respectivamente y un incremento de tensión en el acero de

$$\Delta\sigma_a \;=\; -\,8\cdot\frac{5\cdot 10^3\cdot\left(-8,727\cdot 10^{-2}\right)}{5,26\cdot 10^{-4}}\;\text{Pa}\;=\;\;+\,6{,}637\;\text{MPa}$$

Las tensiones finales en el hormigón son, por tanto,

$$\begin{aligned}\sigma_v^f &= \sigma_v^o+\Delta\sigma_v \;=\; -\,1,429\;\text{MPa}\\ \sigma_{v'}^f &= \sigma_{v'}^o+\Delta\sigma_{v'} \;=\; +\,0,932\;\text{MPa}\end{aligned}$$

y en el acero

$$\sigma_a^f \;=\; \sigma_a^o+\Delta\sigma_a \;=\; +\,12,273\;\text{MPa}$$

La distribución final de tensiones en la sección puede verse en la Figura 5.28d.

(e) El incremento de curvatura debido a la acción del momento es

$$\Delta\chi_z=\frac{M_z\,l}{\overline{E}\,\overline{I_z}}=\frac{5\cdot 10^3\cdot 5}{25\cdot 10^9\cdot 5,26\cdot 10^{-4}}\;\text{m}^{-1}\;=\;1,90\cdot 10^{-3}\;\text{m}^{-1}$$

y la curvatura final es

$$\chi_z^f=\chi_z^o+\Delta\chi_z=1,568\cdot 10^{-3}\;\text{m}^{-1}$$

lo que implica un radio de curvatura de $\rho_z^f=637,76$ m, con el centro de curvatura por encima de la pieza.

5.5 Núcleo central de la sección

Se ha comprobado ya anteriormente que en una sección sometida a flexión compuesta, recta o esviada, si el correspondiente centro de presiones se acerca al centro de gravedad de la sección, esto es, la excentricidad disminuye, el momento flector tiene una menor importancia relativa frente al axil y el eje neutro se aleja del baricentro de la sección y toda ella estará sometida a tracción o compresión, según sea el signo del axil. Por el contrario, si el centro de presiones se aleja del centro de gravedad, esto es, la excentricidad aumenta, la flexión tiene mayor importancia relativa, y el eje neutro se acerca al centro de gravedad de la sección e intersecta a la sección dividiéndola en dos zonas, una traccionada y otra comprimida. En resumen, el hecho de que el eje neutro corte o no a la sección depende de la excentricidad de la fuerza normal aplicada y no del valor de ésta.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

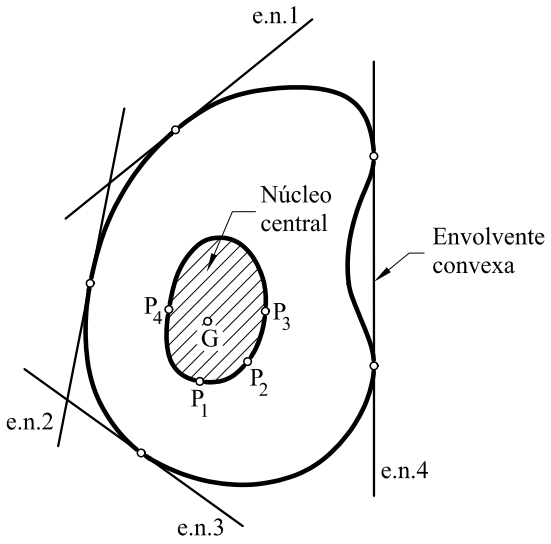

Fig. 5.29: Núcleo central de una sección

Ciertos materiales, como el hormigón o la mampostería, tienen una resistencia a tracción muy pequeña en relación a su resistencia a compresión. Por lo tanto, interesa conocer cuál es la zona en que puede estar situado el punto de aplicación de una fuerza normal que actúa sobre la sección, para que ésta esté sometida a compresión.

Se define el *núcleo central de una sección* como el lugar geométrico de los puntos tales que, tomados como centro de presiones en tracción o compresión excéntricas, producen tensiones normales del mismo signo en todos los puntos de la sección.

Para determinar el núcleo central haremos uso de las siguientes propiedades:

a) para que la sección esté sometida a tensiones normales del mismo signo es necesario y suficiente que el eje neutro *no corte* a la sección.

b) el centro de presiones y el eje neutro son, respectivamente, punto antipolo y recta antipolar respecto a la elipse de inercia de la sección.

Por consiguiente, el núcleo central de una sección está formado por los puntos interiores a una curva cerrada, lugar geométrico de los antipolos, respecto a la elipse central de inercia, de las rectas tangentes que forman la envolvente convexa de la sección.

El concepto de núcleo central de una sección puede visualizarse con más facilidad si se tiene en cuenta que, tal como se muestra en la Figura 5.29:

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

1. *el núcleo central es un recinto cerrado.* Si no lo fuese, incluiría necesariamente puntos infinitamente alejados del centro de gravedad, lo cual es imposible, ya que a centros de presiones suficientemente alejados del baricentro les corresponden ejes neutros suficientemente próximos a éste que cortarían a la sección.

2. *el núcleo central incluye al baricentro de la sección como punto interior,* ya que a centros de presiones suficientemente próximos al centro de gravedad les corresponden ejes neutros suficientemente alejados de éste como para no cortar a la sección.

3. *el núcleo central es un recinto conexo y convexo.* Si no lo fuese, se podrían trazar rectas que cortasen la curva frontera de dicho recinto en, al menos, cuatro puntos. Esto supondría que desde los puntos antipolares de dichas rectas se podrían trazar, al menos, cuatro ejes neutros tangentes a la *envolvente convexa* de la sección, lo cual es imposible.

4. *el núcleo central es interior a la envolvente convexa de la sección,* ya que los centros de presiones son los puntos por los que pasa la resultante de las tensiones normales que actúan sobre la sección; si éstas son todas del mismo signo (tracción o compresión), su resultante debe pasar necesariamente por un punto interior a la envolvente convexa.

Tanto el concepto como la definición y el método de cálculo del núcleo central se deben a Bresse, que los incluyó en su libro sobre Resistencia de Materiales, publicado en 1859. Veamos, a continuación, cómo se determina el núcleo central de algunas secciones particulares.

5.5.1 Sección circular

En una sección circular de radio R cualquier eje que pase por el centro del círculo es eje principal de inercia y el radio de giro correspondiente es

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{\pi\, R^4/4}{\pi\, R^2} = \left(\frac{R}{2}\right)^2 \tag{5.34}$$

Por simetría radial, el núcleo central de una sección circular será un círculo concéntrico (ver Figura 5.30). Calculamos el radio del núcleo central imponiendo que el eje neutro sea tangente a la sección. Tomemos, por ejemplo, el caso de tangencia en la fibra inferior del círculo, de ecuación $y = -R$. Identificando esta ecuación con la expresión general del eje neutro en flexión compuesta recta alrededor del eje z,

$$1 + \frac{e_y\, y}{r_z^2} = 0 \tag{5.35}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

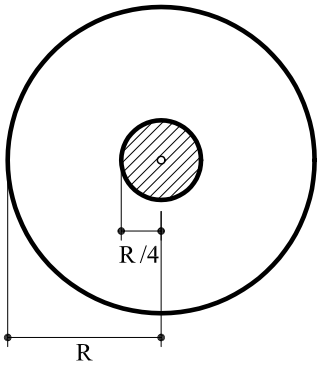

Fig. 5.30: Núcleo central de una sección circular

se tiene:

$$1 + \frac{e\,(-R)}{(R/2)^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e = \frac{R}{4} \tag{5.36}$$

donde e es el radio del círculo que corresponde al núcleo central de la sección circular de radio R.

5.5.2 Sección corona circular

En una sección corona circular de radios R_e y R_i, exterior e interior, respectivamente, cualquier eje que pase por el centro del círculo es eje principal de inercia y el radio de giro correspondiente es

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{\pi\,(R_e^4 - R_i^4)/4}{\pi\,(R_e^2 - R_i^2)} = \frac{R_e^2 + R_i^2}{4} \tag{5.37}$$

Por simetría radial, el núcleo central de una sección corona circular será un círculo concéntrico. Aplicando un proceso similar al utilizado para la sección circular, calculamos el radio del núcleo central imponiendo que el eje neutro sea tangente a la sección, por ejemplo, en la fibra inferior del círculo, de ecuación $y = -R_e$. Identificando esta ecuación con la expresión general del eje neutro en flexión compuesta recta alrededor del eje z, se tiene

$$1 + \frac{e\,(-R_e)}{\frac{R_e^2+R_i^2}{4}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e = \frac{R_e^2 + R_i^2}{4R_e} > \frac{R_e}{4} \tag{5.38}$$

donde e es el radio del círculo que corresponde al núcleo central de la sección corona circular.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

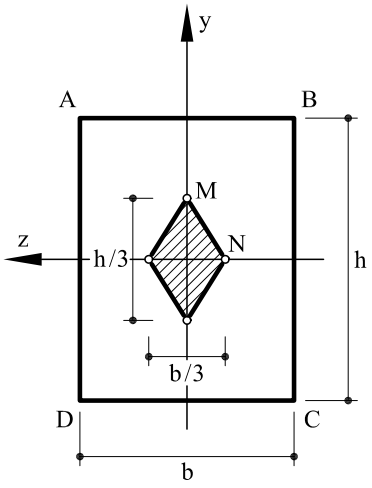

Fig. 5.31: Núcleo central de una sección rectangular

5.5.3 Sección rectangular

La envolvente convexa una sección rectangular de dimensiones b x h es la propia sección. Los radios de giro respecto a los ejes principales de inercia son $r_z^2 = h^2/12$ y $r_y^2 = b^2/12$. Consideremos en primer lugar un eje neutro coincidente con el lado $\overline{CD}$, de ecuación $y = -h/2$; el centro de presiones correspondiente es el punto M, y la ecuación del eje neutro es:

$$1 + \frac{e_M(-\frac{h}{2})}{r_z^2} = 0 \qquad \Rightarrow e_M = \frac{h}{6} \tag{5.39}$$

De forma análoga, para el eje neutro coincidente con el lado $\overline{AD}$, de ecuación $z = b/2$, el centro de presiones es el punto N con excentricidad $e_N = -b/6$.

Cuando el centro de presiones recorre el segmento $\overline{MN}$, los correspondientes ejes neutros giran alrededor del punto D, ya que D es el antipolo de la recta $\overline{MN}$ respecto a la elipse central de inercia de la sección. Por doble simetría respecto a los ejes (y, z), el núcleo central es un rombo de diagonales $h/3$ y $b/3$, respectivamente, según se observa en la Figura 5.31.

5.5.4 Sección en doble *T*

La envolvente convexa de una sección en doble T simétrica es un rectángulo, tal como se muestra en la Figura 5.32. Por tanto, el núcleo central será un rombo como en el

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

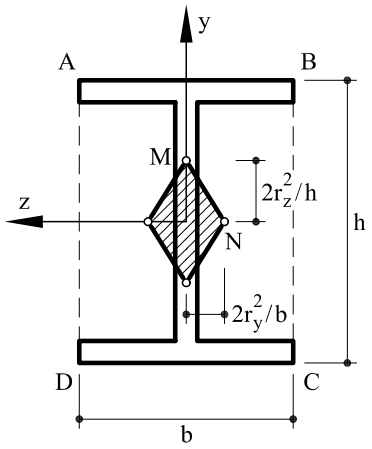

Fig. 5.32: Núcleo central de una sección en doble T

caso anterior, pero las longitudes de sus diagonales vendrán dadas por los radios de giro de la sección en cuestión.

La posición del punto M la obtenemos de considerar que el lado $\overline{CD}$, de ecuación $y = -h/2$, es el eje neutro correspondiente a que M sea centro de presiones:

$$1 + \frac{e_M\,(-\frac{h}{2})}{r_z^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e_M = \frac{2\,r_z^2}{h} \tag{5.40}$$

y, para el punto N y su eje neutro correspondiente $\overline{AD}$, de ecuación $z = b/2$, se tiene:

$$1 + \frac{e_N\,\frac{b}{2}}{r_y^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e_N = -\frac{2\,r_y^2}{b} \tag{5.41}$$

Ejemplo 5.5.1

Dibujar el núcleo central de la sección Z de la Figura 5.33 (cotas en cm).

Las características geométricas de la sección son (ver Ejemplo 5.3.1.1):

$$A = 43,0\,\text{cm}^2 \qquad I_y = 410,6\,\text{cm}^4 \qquad I_z = 3.501,0\,\text{cm}^4$$

con los ejes principales (y, z) formando un ángulo $\alpha = 30,78^\circ$ con los ejes (v, w). Por tanto, los radios de giro son:

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{410,6}{43,0} = 9,6\ \text{cm}^2 \qquad r_z^2 = \frac{3.501,0}{43,0} = 81,4\,\text{cm}^2$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

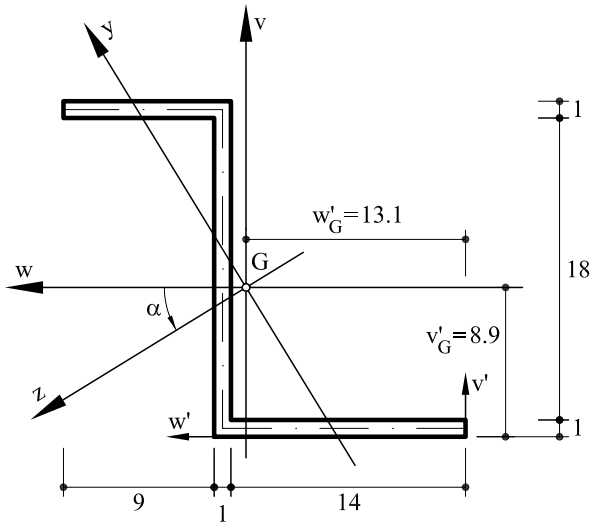

Fig. 5.33: Sección del Ejemplo 5.5.1

Para obtener el núcleo central hallaremos los centros de presiones correspondientes a los ejes neutros envolventes de la sección (Figura 5.34a). La ecuación del eje neutro en función de las excentricidades del centro de presiones es:

$$1 + \frac{e_y\, y}{r_z^2} + \frac{e_z\, z}{r_y^2} = 0$$

y las coordenadas del centro de presiones, en función de las coordenadas de los puntos de intersección del eje neutro con los ejes principales de inercia (a, b), son:

$$e_y = -\frac{r_z^2}{a} \qquad\qquad e_z = -\frac{r_y^2}{b}$$

La ecuación del eje neutro n_1, referida a los ejes principales de la sección es:

$$y = 0,60\, z - 10,36$$

que puede escribirse en forma canónica como

$$\frac{y}{-10,36} + \frac{z}{17,27} = 1$$

y las coordenadas de los puntos de intersección del mismo con los ejes principales son:

$$a_1 = -10,36\,\text{cm} \qquad\qquad b_1 = +17,27\,\text{cm}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

luego, el centro de presiones P_1 asociado al eje neutro n_1 tiene las siguientes coordenadas:

$$\begin{aligned} e_{y_1} &= -\frac{81,4}{-10,36} = +7,86\,\text{cm} \\ e_{z_1} &= -\frac{9,6}{17,27} = -0,55\,\text{cm} \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso para el eje neutro n_2, de ecuación:

$$y = 0,6\,z + 12,92 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2 = +12,92\ \text{cm} \\ b_2 = -21,71\ \text{cm} \end{array} \right.$$

se obtienen las coordenadas del centro de presiones correspondiente P_2:

$$\begin{aligned} e_{y_2} &= -\frac{81,4}{12,92} = -6,30\,\text{cm} \\ e_{z_2} &= -\frac{9,6}{-21,71} = +0,44\,\text{cm} \end{aligned}$$

Para el eje neutro n_3, de ecuación:

$$y = -10,46\,z + 58,08 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_3 = +58,08\,\text{cm} \\ b_3 = +5,55\,\text{cm} \end{array} \right.$$

las coordenadas del centro de presiones P_3 son:

$$\begin{aligned} e_{y_3} &= -\frac{81,4}{58,08} = -1,40\,\text{cm} \\ e_{z_3} &= -\frac{9,6}{5,55} = -1,73\,\text{cm} \end{aligned}$$

Para el eje neutro n_4, de ecuación:

$$y = 10,21\,z + 60,11 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_4 = +60,11\ \text{cm} \\ b_4 = -5,89\ \text{cm} \end{array} \right.$$

las coordenadas del centro de presiones P_4 son:

$$\begin{aligned} e_{y_4} &= -\frac{81,4}{60,11} = -1,35\,\text{cm} \\ e_{z_4} &= -\frac{9,6}{-5,89} = +1,63\,\text{cm} \end{aligned}$$

Para el eje neutro n_5, de ecuación:

$$y = -1,68\,z - 25,64 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_5 = -25,64\,\text{cm} \\ b_5 = -15,17\,\text{cm} \end{array} \right.$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

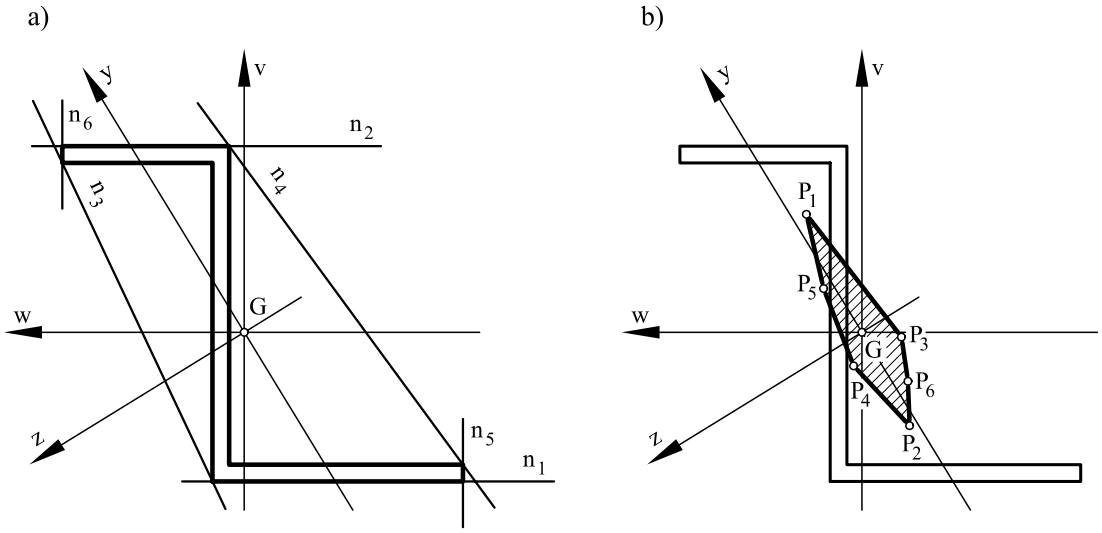

Fig. 5.34: Núcleo central de la sección del Ejemplo 5.5.1

las coordenadas del centro de presiones P_5 son:

$$\begin{aligned} e_{y_5} &= -\frac{81,4}{-25,64} = +3,17\,\text{cm} \\ e_{z_5} &= -\frac{9,6}{-15,17} = +0,63\,\text{cm} \end{aligned}$$

Finalmente para el eje neutro n_6, de ecuación:

$$y = -1,71\,z + 21,39 \quad \begin{cases} a_6 = +21,39\,\text{cm} \\ b_6 = +12,51\,\text{cm} \end{cases}$$

las coordenadas del centro de presiones P_6 son:

$$\begin{aligned} e_{y_6} &= -\frac{81,4}{21,39} = -3,81\,\text{cm} \\ e_{z_6} &= -\frac{9,6}{12,51} = -0,77\,\text{cm} \end{aligned}$$

El núcleo central de la sección es, por lo tanto, el recinto convexo limitado por la poligonal cerrada que une los centros de presiones obtenidos P_1 a P_6 (Figura 5.34b).

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

6 Esfuerzo Cortante

6.1 Introducción

Se dice que una sección de una pieza está sometida a *cizallamiento* o *cortadura* cuando sobre ella actúa un esfuerzo cortante, es decir, una resultante de fuerzas paralelas al plano de la sección. Dado que la existencia de esfuerzo cortante implica la existencia de un momento flector variable, una rebanada diferencial de una pieza sometida a cortadura está también sometida a flexión. Veremos en lo que sigue que, a menudo, es necesario recordar este hecho para proceder al estudio de las tensiones producidas por la combinación de momento flector variable y esfuerzo cortante. Adicionalmente, pueden actuar sobre la sección un esfuerzo axil y/o un momento torsor. En tal caso, y suponiendo que el principio de superposición es aplicable, los resultados obtenidos en este Capítulo deben completarse con los obtenidos en los Capítulos correspondientes.

La actuación de un esfuerzo cortante $\vec{T}$ sobre la sección implica la existencia de una distribución de tensiones tangenciales $\vec{\tau}$ sobre el plano de la sección, de tal forma que se cumpla la relación integral:

$$\vec{T} = \int_S \vec{\tau}\, dS \tag{6.1}$$

Esta ecuación vectorial puede expresarse, referida a los ejes principales de inercia de la sección, (y, z), como dos ecuaciones integrales escalares:

$$T_y = \int_S \tau_{xy}\, dS \qquad ; \qquad T_z = \int_S \tau_{xz}\, dS \tag{6.2}$$

donde T_y, T_z son las componentes del esfuerzo cortante y τ_{xy}, τ_{xz} las componentes de la tensión tangencial.

Las ecuaciones anteriores no bastan para determinar la distribución de tensiones tangenciales, siendo necesario, como en los capítulos anteriores, hacer hipótesis sobre la deformación de la rebanada. Distintas hipótesis de deformación dan lugar a distintos resultados. En lo que sigue se considera, primero, la llamada *teoría elemental de*

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

la cortadura, basada en una hipótesis de deformación muy simple. Se estudia, a continuación, la teoría de la cortadura de Collignon, basada en la hipótesis de deformación a flexión de Saint-Venant (hipótesis generalizada de Bernouilli-Navier).

6.2 Teoría elemental de la cortadura

La hipótesis más simple que puede hacerse respecto a la deformación de una rebanada de una pieza prismática sometida a cortadura es que *"las secciones transversales permanecen planas y se mueven paralelas a sí mismas en la dirección del esfuerzo cortante".* En tal caso, en una rebanada de longitud dx tal como la mostrada en la Figura 6.1, sometida a la acción de un esfuerzo cortante en una determinada dirección, una sección como la S_2 tendrá respecto a otra infinitamente próxima S_1 un desplazamiento relativo de valor dv, en la dirección del cortante actuante. La distorsión angular producida en un punto cualquiera de la rebanada vendrá dada por:

$$\gamma = \frac{dv}{dx} \tag{6.3}$$

Por tanto, la rebanada está sometida a un estado de distorsión uniforme de valor γ. Si se cumple la ley de Hooke, la tensión tangencial que actúa en un punto cualquiera de la sección vale:

$$\tau = G\,\gamma \tag{6.4}$$

donde G es el módulo de rigidez transversal del material de la pieza.

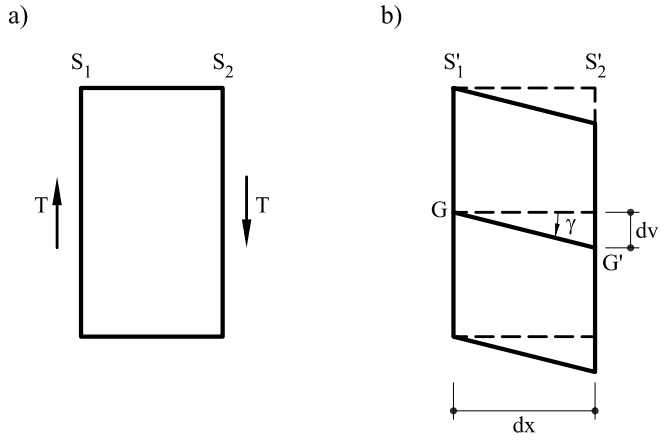

Fig. 6.1: Hipótesis de deformación de la Teoría elemental

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Como la resultante de estas tensiones debe ser igual al esfuerzo cortante, se tiene una distribución uniforme de tensiones tangenciales, de dirección coincidente con la del esfuerzo cortante, y de valor:

$$\tau = \frac{T}{A} \tag{6.5}$$

donde A es el área de la sección. La distorsión angular valdrá entonces:

$$\gamma = \frac{T}{GA} \tag{6.6}$$

Nótese que el alargamiento de una fibra cualquiera, por ejemplo, el de la fibra que une los centros de gravedad de las dos secciones extremas de la rebanada, viene dado por:

$$\epsilon_x = \frac{(dx^2+dv^2)^{\frac{1}{2}}-dx}{dx} \tag{6.7a}$$

$$= (1+\gamma^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \tag{6.7b}$$

$$\simeq \frac{\gamma^2}{2} \tag{6.7c}$$

Al ser pequeño el valor de la distorsión angular γ, este alargamiento longitudinal puede suponerse despreciable y, por tanto, no se producen tensiones normales asociadas a la acción del esfuerzo cortante.

Esta teoría elemental de la cortadura no es rigurosamente admisible porque no cumple las condiciones de equilibrio interior del sólido, tal como se enunciaron en el Capítulo 1 y, en particular, viola el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales. En efecto, consideremos una sección de una pieza sometida a esfuerzo cortante vertical y

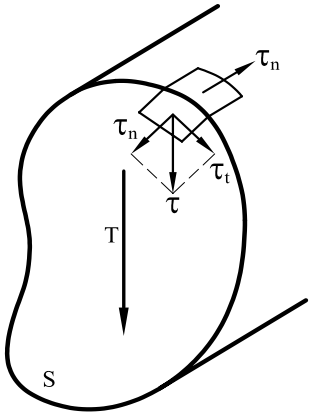

Fig. 6.2: Tensiones tangenciales sobre el contorno de la sección

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

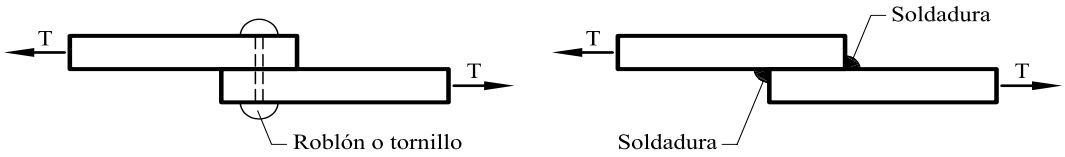

Fig. 6.3: Aplicaciones de la teoría elemental: uniones roblonadas o soldadas

un elemento de dicha sección próximo al contorno, tal como se muestra en la Figura 6.2. Si la tensión tangencial τ sobre dicho elemento es vertical, tal como corresponde según la teoría elemental, esta tensión puede descomponerse en una componente normal al contorno, τ_n, y otra tangencial al mismo, τ_t. Según el principio de reciprocidad, sobre la superficie lateral de la pieza, ortogonal a la sección recta, debe existir una componente igual y opuesta a τ_n. Pero, en general, esta superficie lateral de la pieza está libre de tensiones, luego τ_n debe ser nula. Por tanto, la única dirección posible de la tensión tangencial, en puntos próximos al contorno de la sección, es la tangente al propio contorno, contrariamente a la hipótesis inicial de que la dirección de la tensión tangencial coincide con la del esfuerzo cortante actuante.

Esta inconsistencia demuestra que la teoría elemental de la cortadura se basa en una hipótesis de deformación excesivamente simplificada. Sin embargo, es habitual utilizar esta teoría elemental para realizar el cálculo de uniones de piezas mediante remaches o cordones de soldadura (ver Figura 6.3).

Procederemos en lo que sigue a desarrollar una teoría aproximada de cortadura algo más elaborada que, por una parte, satisfaga las condiciones de equilibrio interno del sólido y, por otra, sea compatible con las hipótesis de deformación utilizadas en el estudio de tensiones normales producidas por la flexión de la pieza.

6.3 Teoría de Collignon

Consideremos una pieza prismática recta de sección arbitraria pero constante a lo largo de la pieza, sometida a flexión simple según un plano principal de inercia (flexión recta). Supongamos a efectos de desarrollo que sobre una rebanada diferencial de la pieza actúan un momento flector variable M_z y un esfuerzo cortante T_y, ambos contenidos en el plano principal de inercia xy (ver Figura 6.4).

Del equilibrio de momentos de la rebanada, limitada por dos secciones S (frontal) y S' (dorsal), separadas una distancia dx, se obtiene la relación:

$$T_y = -\frac{dM_z}{dx} \tag{6.8}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Consideremos ahora la rebanada dividida por una superficie plana $ABA'B'$, paralela al eje de la viga y que tenga a la recta AB por traza sobre el plano de la sección S y a la recta $A'B'$ por traza sobre el plano de la sección S'. Estudiemos el equilibrio de fuerzas según el eje x que actúan sobre la parte rayada de la rebanada (1) que queda por encima de dicha superficie de corte. De acuerdo con la ley tensiones de Navier, sobre la cara S' actúan unas tensiones normales debidas a M_z cuya resultante F sobre la parte de la sección (1), limitada por la línea $A'B'$, vale:

$$F = \int_\Omega \sigma_x \, d\Omega = \int_\Omega -\frac{M_z}{I_z} \, y \, d\Omega = -\frac{M_z}{I_z} \, m_z^e(\Omega) \tag{6.9}$$

donde Ω es la parte de la sección sobre la que se evalúa dicha resultante (área rayada en la Figura 6.4) y $m_z^e(\Omega) = \int_\Omega y \, d\Omega$ es el momento estático de Ω respecto al eje z. De igual forma, sobre la cara S actúan unas tensiones normales debidas a la acción del momento $M_z + dM_z$, cuya resultante $F + dF$ vale:

$$F + dF = -\int_\Omega \frac{M_z + dM_z}{I_z} \, y \, d\Omega = -\frac{M_z + dM_z}{I_z} \, m_z^e(\Omega) \tag{6.10}$$

La diferencia entre ambas fuerzas normales es:

$$dF = -\frac{dM_z}{I_z} \, m_z^e(\Omega) \tag{6.11a}$$

$$= \frac{T_y \, dx}{I_z} \, m_z^e(\Omega) \tag{6.11b}$$

donde se ha tenido en cuenta que $dM_z = -T_y \, dx$.

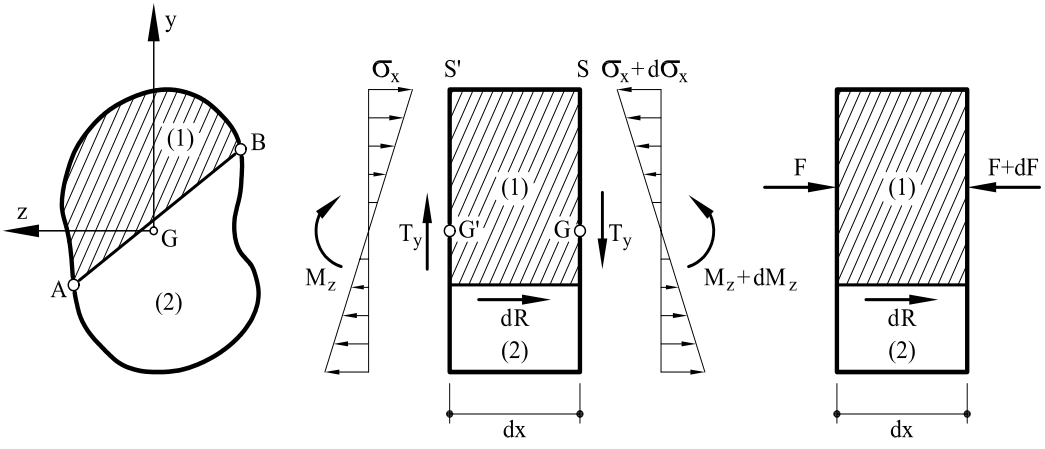

Fig. 6.4: Deducción de la fórmula de Collignon

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Nótese que la expresión anterior es independiente del valor M_z del momento flector, y que sólo depende de dM_z, es decir, de la variación de dicho momento y, por lo tanto, del cortante T_y. Obsérvese también que, al ser el eje z un eje que pasa por el baricentro de la sección, el momento estático respecto a dicho eje del área rayada situada por encima de la línea AB es igual, en valor absoluto, al momento estático del área situada por debajo de ésta.

Consideremos, por otro lado, las tensiones tangenciales que la parte de la rebanada (2), situada por debajo del plano de corte, ejerce sobre la parte (1) superior. Llamando dR a la resultante de estas tensiones tangenciales se puede escribir que

$$dR = dx \int_{AB} \tau \, dl \tag{6.12a}$$

$$\simeq dx \, \tau_{\text{med}} \, l_{AB} \tag{6.12b}$$

donde l_{AB} es la longitud del segmento $\overline{AB}$ y τ_{med} queda definida como la tensión rasante *media* en la superficie $ABA'B'$.

El equilibrio de fuerzas según la dirección x del elemento diferencial (1) exige que $dR = dF$ (ver Figura 6.4) y, por tanto, igualando las ecuaciones (6.11b) y (6.12b), se tiene que:

$$\tau_{\text{med}} = \frac{T_y \, m_z^e(\Omega)}{I_z \, l_{AB}} \tag{6.13}$$

La expresión anterior es conocida como *fórmula de Collignon* (1877), aunque este método aproximado de evaluar tensiones rasantes en vigas había sido ya utilizado por Jourawski en 1844 para calcular vigas de madera y vigas armadas con roblones, y publicado por éste en 1856. Obsérvese que dicha fórmula no proporciona el valor de la tensión rasante en un punto concreto, sino el valor *medio* de la tensión tangencial rasante a lo largo de la superficie de contacto.

Nótese que de considerar el equilibrio de fuerzas según el eje x que actúan sobre la parte rayada de la rebanada (2) que queda por debajo de dicha superficie de corte se deduce que la fuerza rasante que la parte (1) ejerce sobre ésta es también de valor igual a dR, y de sentido contrario al que actúa sobre la parte superior (ver Figura 6.5a). Las tensiones rasantes en la superficie de corte de la parte (2) son, obviamente, de igual valor y sentido contrario a las que actúan sobre la superficie de corte de la parte (1).

Por el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, junto a las tensiones rasantes, paralelas al eje de la pieza, que aparecen en la superficie $ABA'B'$, para equilibrar a dF aparecen otras contenidas en el plano de S (y de S'), cuya *componente normal* a la línea AB (y $A'B'$) será igual en cada punto a la correspondiente tensión tangencial contenida en la superficie plana $ABA'B'$. Estas tensiones rasantes sobre las secciones S y S' se muestran en la Figura 6.5b. Obsérvese que, según el principio

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

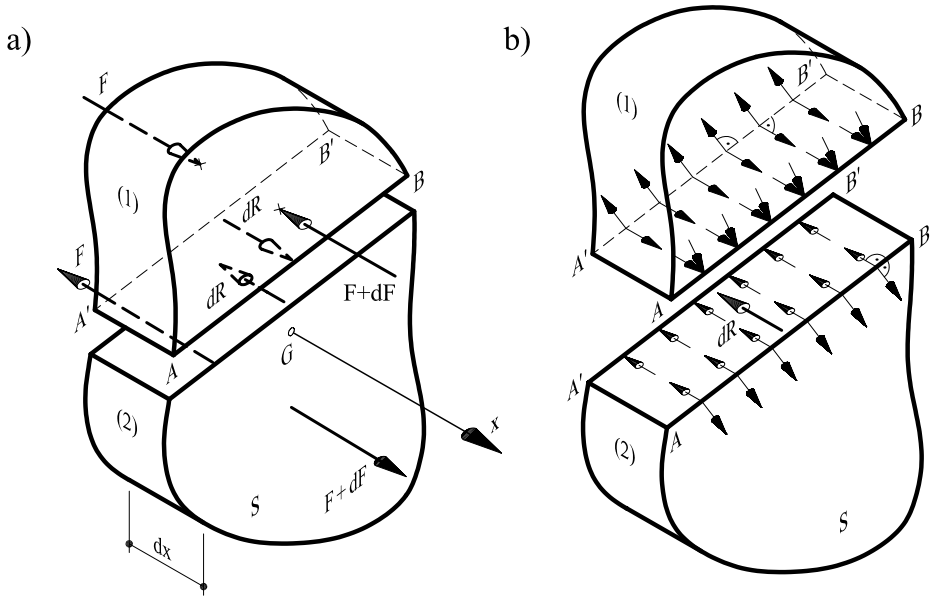

Fig. 6.5: Tensiones rasantes y tangenciales

de reciprocidad, ambas estarán dirigidas hacia la línea (hacia AB, en este caso) o se separarán de ella (como en $A'B'$, en este caso).

Por tanto, la fórmula de Collignon (6.13) nos permite hallar, por ser ambas iguales en módulo, tanto la tensión rasante media que actúa sobre la superficie $ABA'B'$ como la tensión tangencial media contenida en la sección S (y S'), a lo largo de $\overline{AB}$ (y $\overline{A'B'}$) y normal a esta línea, debida al esfuerzo cortante. La misma observación permite determinar, sin ambigüedad, el sentido de estas tensiones cortantes.

De la fórmula fundamental se deduce que las tensiones tangenciales son nulas en los puntos más alejados del eje z, ya que para ambos se verifica que el momento estático correspondiente $m_z^e(\Omega)$ es nulo: en el punto superior por ser nula el área Ω, y en el inferior por ser Ω igual al área de la sección, y ser nulo el momento estático de la sección respecto a un eje baricéntrico como el eje z.

Es importante resaltar que en la deducción anterior de la fórmula de Collignon se ha supuesto que tanto el esfuerzo cortante como el momento flector estaban contenidos en uno de los planos principales de inercia y se trataba, pues, de un caso de flexión simple *recta*. Es evidente, sin embargo, que el papel que juega el momento flector en la deducción es puramente instrumental, ya que el cortante aparece *únicamente* debido a *la variación del momento flector*. Situaciones *distintas* de flexión, pero que tengan la misma variación de momento flector, producen idéntico esfuerzo cortante y, obviamente,

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

idénticas tensiones tangenciales de cortadura. Por tanto, la deducción anterior se puede extender fácilmente a situaciones en las que el esfuerzo cortante actúe según uno de los ejes principales de inercia, a pesar de que la flexión sea esviada, *siempre que la variación del momento flector esté contenida en uno de los planos principales de flexión.*

Ejercicio 6.3.1

Comprobar que la distribución de tensiones tangenciales que proporciona la fórmula de Collignon satisface las relaciones integrales de equilibrio interno.

A tal efecto, recordemos que la fórmula de Collignon expresa que las componentes τ_{xy} *medias* debidas a un cortante T_y pueden obtenerse cortando la rebanada por planos $ABA'B'$ perpendiculares al eje y (ver Figura 6.6a), y valen:

$$\tau_{xy} = \frac{T_y\, m_z^e(y)}{I_z\, l(y)}$$

Comprobemos en primer lugar que la resultante de dichas componentes $\overline{\tau}_{xy}$ es igual al esfuerzo cortante actuante T_y, es decir:

$$\begin{aligned}
\int_S \tau_{xy}\, dS &= \int_{-v'}^{+v} \frac{T_y\, m_z^e(y)}{I_z\, l(y)} l(y)\, dy \\
&= \frac{T_y}{I_z} \int_{-v'}^{+v} m_z^e(y)\, dy \\
&= \frac{T_y}{I_z} I_z = T_y \qquad \text{(q.e.d)}
\end{aligned}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\int_{y=-v'}^{y=+v} m_z^e(y)\, dy &= \int_{y=-v'}^{y=+v} \int_{\bar{y}=y}^{\bar{y}=+v} \bar{y}\, l(\bar{y})\, d\bar{y}\, dy \\
&= \int_{\bar{y}=-v'}^{\bar{y}=+v} \int_{y=-v'}^{y=\bar{y}} \bar{y}\, l(\bar{y})\, d\bar{y}\, dy \\
&= \int_{\bar{y}=-v'}^{\bar{y}=+v} \bar{y}\, l(\bar{y})\, d\bar{y}\, (\bar{y} + v') \\
&= \int_{\bar{y}=-v'}^{\bar{y}=+v} \bar{y}^2 l(\bar{y})\, d\bar{y} + v' \int_{\bar{y}=-v'}^{\bar{y}=+v} \bar{y}\, l(\bar{y})\, d\bar{y} \\
&= \int_S \bar{y}^2 dS + v' \int_S \bar{y}\, dS \\
&= I_z
\end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

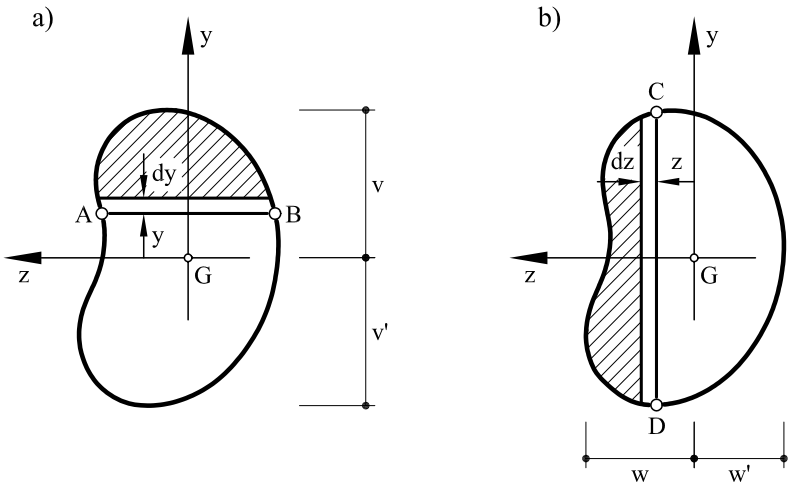

Fig. 6.6: Elementos diferenciales de área y momentos estáticos

donde se ha utilizado el teorema de Fubini para reescribir la primera doble integral, y el hecho de que el eje z sea baricéntrico ($\int_S \bar{y}\, dS = 0$).

Análogamente, se utiliza la fórmula de Collignon para calcular las componentes τ_{xz} *medias* debidas al mismo cortante T_y cortando la sección por planos $CDC'D'$ perpendiculares al eje z (ver Figura 6.6b):

$$\tau_{xz} = \frac{T_y\, m_z^e(z)}{I_z\, l(z)}$$

Comprobemos que la resultante de dicha distribución de tensiones $\overline{\tau}_{xz}$ es nula:

$$\begin{aligned}
\int_S \tau_{xz}\, dS &= \int_{-w'}^{+w} \frac{T_y\, m_z^e(z)}{I_z\, l(z)}\, l(z)\, dz \\
&= \frac{T_y}{I_z} \int_{-w'}^{+w} m_z^e(z)\, dz \\
&= \frac{T_y}{I_z} I_{yz} \\
&= 0 \qquad \text{(q.e.d)}
\end{aligned}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\int_{z=-w'}^{z=+w} m_z^e(z)\, dz &= \int_{z=-w'}^{z=+w} \int_{\bar{z}=z}^{\bar{z}=+w} \int_{y=-v'(\bar{z})}^{y=+v(\bar{z})} y\, dy\, d\bar{z}\, dz \\
&= \int_{\bar{z}=-w'}^{\bar{z}=+w} \int_{z=-w'}^{z=\bar{z}} \int_{y=-v'(\bar{z})}^{y=v(\bar{z})} y\, dy\, d\bar{z}\, dz
\end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\bar{z}=-w'}^{\bar{z}=+w} \int_{y=-v'(\bar{z})}^{y=-v(\bar{z})} (\bar{z}+w')\, y\, dy\, d\bar{z} \\
&= \int_S \bar{z}\, y\, dS + w' \int_S y\, dS \\
&= I_{yz} + 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado de nuevo el teorema de Fubini, y el hecho de que los ejes (y, z) son principales de inercia de la sección.

La importancia de los esfuerzos rasantes puede ponerse en evidencia mediante un experimento simple. Analicemos una viga simplemente apoyada, sometida a flexión simple, tal como la que se muestra en la Figura 6.7a. Imaginemos un corte longitudinal de la pieza según un plano horizontal AA' que divide la viga en dos partes: (1) la situada por encima del plano de corte y (2) la situada por debajo de éste. Al flectar la viga aparecen a lo largo de la superficie AA' unas tensiones tangenciales rasantes que impiden que la parte (1) deslice sobre la (2), y que hacen que la viga se comporte como una pieza única, tal como se muestra en la Figura 6.7b. Si el corte según AA' fuese real, y las partes (1) y (2) estuvieran simplemente superpuestas (sin rozamiento), estas tensiones rasantes no aparecerían, y el conjunto se comportaría de forma totalmente diferente, tal como se muestra en la Figura 6.7c.

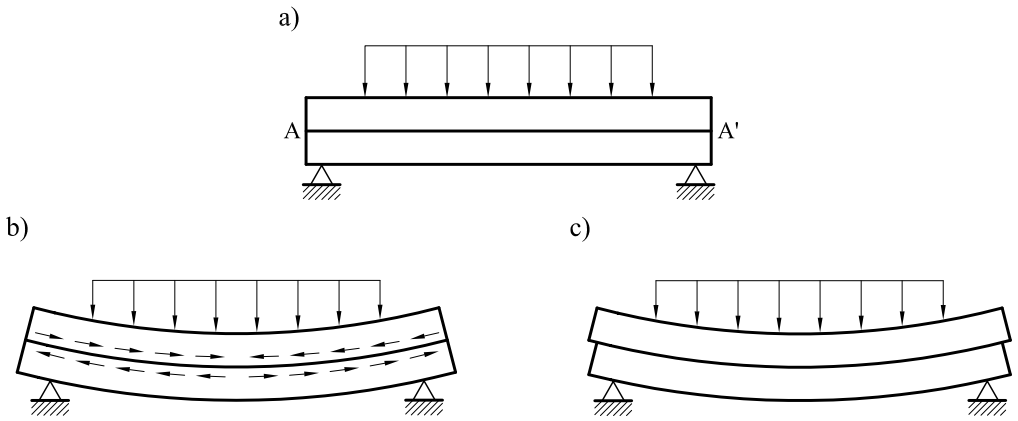

Fig. 6.7: Deformación de una viga sometida a flexión simple: (b) con tensiones rasantes y (c) sin tensiones rasantes

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Si se unen dos vigas superpuestas, y se desea que éstas trabajen solidariamente, aumentando así la resistencia a flexión de forma considerable (ver Ejemplo 4.2.5), se debe evitar el deslizamiento de una sobre la otra y posibilitar la aparición de las necesarias fuerzas rasantes. A tal efecto, deben unirse las partes componentes de las piezas mediante cuñas, tornillos pasantes o cualquier otro dispositivo que sea capaz de transmitir y resistir las fuerzas rasantes correspondientes.

Ejemplo 6.3.1

La viga biapoyada de la Figura 6.8, de $l = 6$ m de luz, está sometida a una carga uniformemente repartida $p = 3$ kN/m. Se quiere construir a partir de tres piezas independientes de 40 x 10 cm, unidas mediante conectores, tal como se indica en la figura. Dimensionar el diámetro de dichos conectores, sabiendo que se colocan a una distancia $d = 15$ cm de separación entre ellos, y que la tensión tangencial admisible en ellos es $\tau^* = 200$ MPa.

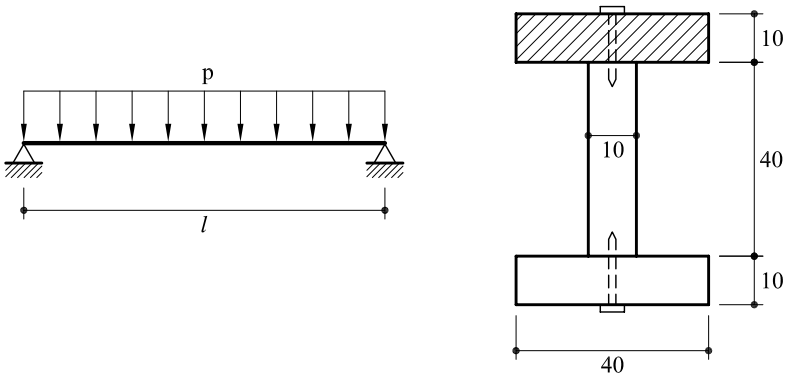

Fig. 6.8: Viga armada del Ejercicio 6.3.1

El cortante máximo en la viga se da en las secciones de apoyo y es igual a las reacciones verticales en éstos:

$$T_{\max} = \frac{pl}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ kN}$$

La inercia de la sección respecto al eje baricéntrico horizontal vale:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{12} 10 \cdot 40^3 + 2 \cdot \left[\frac{1}{12} 40 \cdot 10^3 + 40 \cdot 10 \cdot 25^2 \right] \text{ cm}^4 \\ &= 56 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Según la fórmula de Collignon, la tensión rasante media sobre las superficies de contacto entre las alas y el alma de la sección es

$$\tau_{\text{med}} = \frac{T\, m^e(\Omega)}{I\, b}$$

donde $m^e(\Omega)$ es el momento estático del ala respecto del eje baricéntrico horizontal y b es el ancho de la superfice de contacto, o sea:

$$\begin{aligned} m^e(\Omega) &= 10 \cdot 40 \cdot 25 \text{ cm}^3 = 0,01 \text{ m}^3 \\ b &= 0,1 \text{ m} \end{aligned}$$

con lo que $\tau_{\text{med}} = 0,161$ MPa. Cada conector de la zona de apoyos debe soportar una fuerza rasante de valor

$$R = \tau_{\text{med}}\, b\, d = 0,161 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 0,15 \text{ N} = 2,42 \text{ kN}$$

Suponiendo ahora que la teoría elemental de la cortadura es aplicable al conector se tiene que la tensión rasante en cada uno ellos es

$$\tau_{\text{con}} = \frac{R}{A_{\text{con}}} \leq \tau^*$$

de donde el área de cada conector resulta

$$A_{\text{con}} \geq \frac{R}{\tau^*} = \frac{2,42 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} \text{ m}^2 = 12,1 \text{ mm}^2$$

Si los conectores son de sección circular, se requiere un diámetro mímino de $\phi = 4$ mm.

Los cálculos anteriores proporcionan el diámetro mínimo de los conectores en las secciones próximas a los apoyos, donde el esfuerzo cortante es máximo. Dado que la variación del cortante es lineal a lo largo de la viga, con valores decrecientes a medida que nos acercamos al centro de la luz, es posible aumentar el espaciado de los conectores a medida que las tensiones rasantes disminuyen. Así, por ejemplo, en los 3 metros centrales de la viga el cortante es inferior a $T = 4,5$ kN y es posible aumentar el espaciado a $d = 30$ cm sin que la tensión en los conectores supere la tensión admisible especificada.

6.4 Secciones macizas

6.4.1 Sección rectangular

Consideremos una viga de sección rectangular maciza de dimensiones $b \times h$ y determinemos, utilizando la teoría de Collignon, la tensión tangencial τ en un punto cualquiera de la sección recta, sometida a un esfuerzo cortante vertical de valor T.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

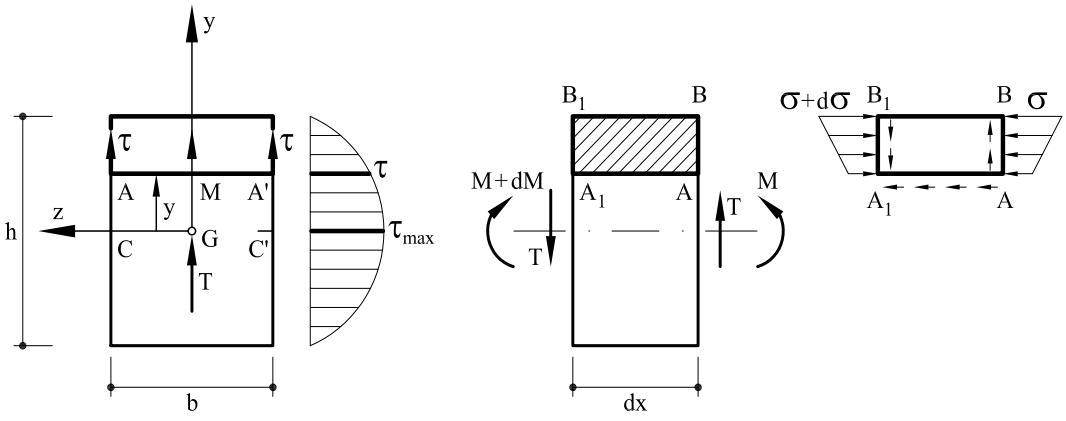

Fig. 6.9: Tensiones tangenciales y rasantes en sección rectangular

Según el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, en puntos como A y A' del contorno de la sección (ver Figura 6.9) éstas deben estar dirigidas según dicho cortorno, es decir, son verticales. Por simetría, en el punto M también debe serlo. Por tanto, y como hipótesis simplificativa, admitiremos que en todo punto de la línea AA' las tensiones tangenciales son paralelas al esfuerzo cortante T, es decir, son verticales y que la distribución es uniforme a lo largo de la línea AA'. El sentido de las tensiones cortantes coincide obviamente con el del esfuerzo cortante. Entonces, el valor en cada punto coincide con el valor medio que proporciona la fórmula fundamental aplicada a la parte de sección situada por encima de la línea AA'. En este caso, tenemos $T_y = T$, $I_z = bh^3/12$ y $l = b$. El momento estático de la parte de sección situada por encima de la línea AA' puede calcularse en función de la ordenada y del corte y vale

$$m_z^e(y) = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{\frac{h}{2} + y}{2} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{6.14}$$

Por tanto, sustituyendo los valores anteriores en la fórmula de Collignon se tiene:

$$\tau(y) \simeq \tau_{\text{med}}(y) = \frac{3}{2}\frac{T}{bh}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right] \tag{6.15}$$

De esta expresión se deduce que la distribución de tensiones tangenciales en una sección rectangular sometida a esfuerzo cortante vertical es parabólica en función de la ordenada y, es nula en las fibras extremas ($y = \pm h/2$), y tiene su valor máximo en los puntos del eje z ($y = 0$) donde vale

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{T}{bh} = \frac{3}{2}\frac{T}{A} \tag{6.16}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Por consiguiente, la tensión tangencial máxima es un 50% mayor que la que se obtiene suponiendo una distribución uniforme de tensiones (Jourawski, 1844), tal como se obtendría de aplicar la teoría elemental de la cortadura. Cabe también señalar que se cumplen la relaciones integrales siguientes:

$$\begin{aligned} T_y &= \int_S \tau_{xy}\, dS \;=\; \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{3}{2}\frac{T}{bh}\left[1-\left(\frac{2y}{h}\right)^2\right] b\, dy \;=\; T \\ T_z &= \int_S \tau_{xz}\, dS \;\equiv\; 0 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Los valores que proporciona la expresión (6.15) no son exactos, pero sí muy aproximados, tanto más cuanto mayor sea la relación h/b. Por ejemplo, si se calculan mediante la Teoría de la Elasticidad los valores exactos para los puntos del eje z ($y = 0$), se obtiene que la distribución no es uniforme a lo largo del eje, sino que hay un máximo en los puntos C y C' y un mínimo en el punto G. Los factores de corrección que habría que aplicar respecto al valor $\tau_{\max}$ calculado aproximadamente se dan en la Tabla 6.1. Obsérvese lo cercano que el factor es a la unidad para $h/b > 1$.

	$h/b = 2$	$h/b = 1$	$h/b = 1/2$	$h/b = 1/4$
$z = 0$	$0,983$	$0,940$	$0,856$	$0,805$
$z = \pm\, b/2$	$1,033$	$1,126$	$1,396$	$1,988$

Tabla 6.1: Valores de corrección para tensiones tangenciales en el eje y=0

6.4.2 Sección simétrica

Consideremos una sección de forma arbitraria pero con un eje vertical de simetría al que denominaremos eje principal de inercia y. Consideremos además que sobre la sección actúa un esfuerzo cortante T paralelo al eje de simetría, tal como se muestra en la Figura 6.10. La tensión τ en un punto cualquiera tendrá dos componentes, τ_{xy} y τ_{xz}, paralelas a los ejes y y z, respectivamente.

Para calcular la componente vertical media a lo largo de una línea horizontal AA' se aplica la fórmula de Collignon :

$$\tau_{xy}^{\text{med}}(y) = \frac{T\, m_z^e(y)}{I_z\, l(y)} \tag{6.18}$$

donde $l(y)$ es la longitud del segmento $\overline{AA'}$, que varía con la ordenada y del corte a la sección.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

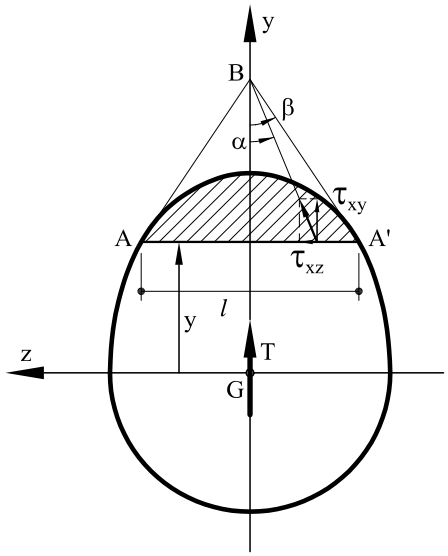

Fig. 6.10: Sección simétrica sometida a cortante

Por lo tanto, τ_{xy} variará según lo haga la relación $m_z^e(y)/l(y)$ y, *normalmente*, será máxima para los puntos situados sobre el eje z, a no ser que la anchura de la sección $l(y)$ crezca más rápido que $m_z^e(y)$ a medida que nos acercamos al eje z, como sucede, por ejemplo, en un rombo o en un triángulo isósceles.

En los puntos extremos A y A' del segmento, la tensión tangencial τ debe ser tangente al contorno y, en consecuencia, sus direcciones se cortan en un punto B del eje y. Supondremos, de forma simplificada, que para todo punto situado entre A y A', la dirección de τ es tal que pasa por B. En este caso, la componente horizontal de la tensión tangencial vale para cada punto:

$$\tau_{xz} = \tau_{xy} \tan \alpha \tag{6.19}$$

donde el ángulo α varía para cada punto, es decir, es función de las coordenadas (y, z) del punto considerado. La tensión total, en un punto interior de la sección, vale entonces:

$$\tau(y, z) = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{\tau_{xy}}{\cos \alpha} \tag{6.20}$$

La tensión máxima en una línea AA' se da en el contorno y es igual a:

$$\tau_{\max} = \frac{\tau_{xy}}{\cos \beta} \tag{6.21}$$

donde el ángulo β es sólo función de la ordenada y.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Notemos de nuevo que en un punto genérico de la sección, la dirección de la tensión tangencial *no* coincide con la del esfuerzo cortante T, sino que tiene componentes según los dos ejes principales de inercia.

6.4.3 Sección circular

La sección circular es un caso particular de sección simétrica, con la peculiaridad de que cualquier eje que pase por el centro de gravedad es eje de simetría y, por consiguiente, es eje principal de inercia. Supongamos, por ejemplo, que el esfuerzo cortante tiene la dirección del eje vertical, al que llamaremos y.

Tenemos, para una sección de radio r, que $I_z = \pi r^4/4$ y $A = \pi r^2$. Además, la anchura de una cuerda paralela al eje z, situada a la ordenada y, es $l(y) = 2\sqrt{r^2 - y^2}$, y el momento estático de la superficie situada por encima de ella es

$$m_z^e(y) = \int_y^r y\, 2\sqrt{r^2 - y^2}\, dy = \frac{2}{3}(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \tag{6.22}$$

Por tanto, la distribución de tensiones tangenciales verticales media τ_{xy} es:

$$\tau_{xy}(y) = \frac{T\,\frac{2}{3}(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{\pi r^4}{4})\,2\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{4}{3}\frac{T}{A}\left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right] \tag{6.23}$$

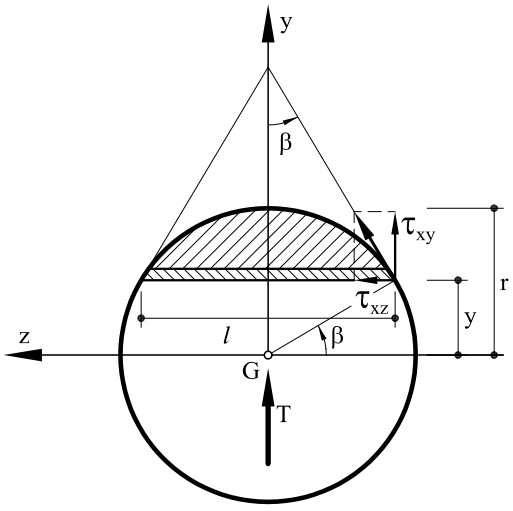

Fig. 6.11: Sección circular sometida a cortante

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

es decir, una función parabólica de la ordenada y. Además:

$$\cos\beta = \frac{l/2}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2} \tag{6.24}$$

Por tanto, en el contorno se dan las tensiones tangenciales máximas, de valor:

$$\tau(y) = \frac{\tau_{xy}}{\cos\beta} = \frac{4}{3}\frac{T}{A}\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2} \tag{6.25}$$

es decir, una función elíptica de la ordenada y.

De lo anterior se deduce que la tensión tangencial máxima se presenta en los puntos del eje z ($y = 0$), y vale:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3}\frac{T}{A} \tag{6.26}$$

y resulta ser un 33% mayor de lo que resultaría si T se repartiera uniformemente en toda la superficie, según la teoría elemental. Si se calcula la distribución de tensiones tangenciales a lo largo del eje z según la Teoría de la Elasticidad, resulta que la distribución no es uniforme a lo largo de dicho eje, sino que tiene un máximo en el centro que vale:

$$\tau_{\max} = \frac{3 + 2\nu}{2(1 + \nu)}\frac{T}{A} \tag{6.27}$$

donde ν es el coeficiente de Poisson del material de la pieza. Para $\nu = 0,3$, correspondiente al acero, se tiene $\tau_{\max} = 1,385\, T/A$, es decir, un 3% de error respecto a la obtenida anteriormente, lo que resulta una excelente aproximación.

Es fácil comprobar que se cumplen las relaciones integrales:

$$\begin{aligned} T_y &= \int_{-r}^{+r} \frac{4}{3}\frac{T}{A}\left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right] l(y)\, dy \;=\; T \\ T_z &= \int_S \tau_{xz}\, dS \;\equiv\; 0 \end{aligned} \tag{6.28}$$

ésta segunda por simetría respecto al eje y.

Señalaremos de nuevo, que aunque se considere un caso en que el esfuerzo cortante actúa según uno de los ejes principales de inercia, la tensión tangencial en un punto genérico de la sección tiene componentes τ_{xy}, τ_{xz} según los dos ejes principales. Por tanto, en general, la dirección de τ no coincide con la de T.

6.4.4 Sección triangular isósceles

Consideremos una sección triangular isósceles, simétrica respecto del eje vertical, de base b y altura h, solicitada por el esfuerzo cortante vertical T (Figura 6.12).

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

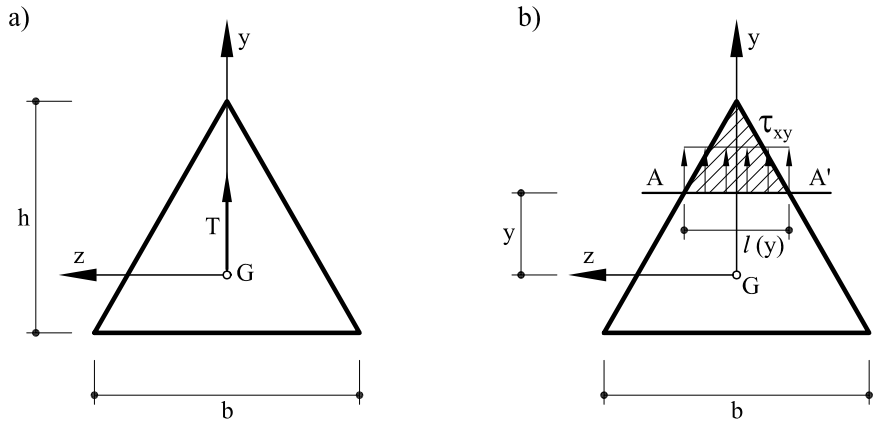

Fig. 6.12: Sección triangular isósceles sometida a cortante

Los ejes $(y,\ z)$ son ejes principales de inercia de la sección, por ser y eje de simetría del triángulo. Se tiene que $I_z = bh^3/36$. La tensión tangencial τ_{xy} a lo largo de la línea AA' puede calcularse mediante:

$$\tau_{xy}(y) = \frac{T\, m_z^e(y)}{I_z\, l(y)} \tag{6.29}$$

con $l(y) = (2h - 3y)\, b/3h$, y $m_z^e(y)$ es el momento estático respecto al eje z, de la parte superior del triángulo limitada por la línea AA', de valor:

$$m_z^e(y) = \frac{1}{2} l(y) \left(\frac{2h}{3} - y\right) \left[\frac{\frac{2h}{3} - y}{3} + y\right] \tag{6.30a}$$

$$= \frac{l(y)}{3} \left(\frac{2h}{3} - y\right) \left(y + \frac{h}{3}\right) \tag{6.30b}$$

Por tanto, la distribución de tensiones tangenciales τ_{xy} de la sección triangular es:

$$\tau_{xy} = \frac{12T}{bh^3} \left(\frac{2h}{3} - y\right) \left(y + \frac{h}{3}\right) \tag{6.31}$$

Puede observarse que la distribución de tensiones tangenciales es una función parabólica de la ordenada y, de valor nulo para los puntos $y = 2h/3$ y $y = -h/3$, es decir, en el vértice y en la base del triángulo. Además, la tensión tangencial τ_{xy} máxima se presenta en los puntos del triángulo de ordenada y igual a:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{12T}{bh^3} \left[\frac{h}{3} - 2y\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{h}{6} \tag{6.32}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

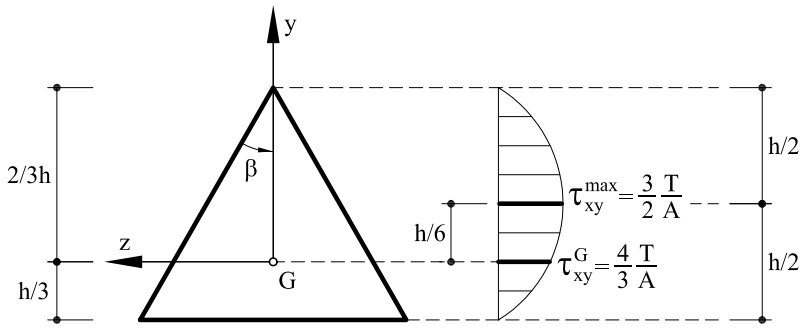

Fig. 6.13: Distribución de tensiones tangenciales sobre triángulo isósceles

y su valor es:

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{3T}{bh} = \frac{3}{2}\frac{T}{A} \tag{6.33}$$

Obsérvese que el valor máximo de las tensiones tangenciales τ_{xy} no coincide con los puntos situados a la altura del baricentro. En efecto, para $y = 0$ el valor de la tension tangencial τ_{xy} es:

$$\tau_{xy}^{G} = \frac{8}{3}\frac{T}{bh} = \frac{4}{3}\frac{T}{A} \tag{6.34}$$

Ademas, en este caso, el ángulo β es tal que $\tan\beta = (b/2h)$. Por tanto, las componentes horizontales τ_{xz} valen en el contorno

$$\tau_{xz}^{\text{cont}} = \tau_{xy}\tan\beta = \frac{6T}{h^4}\left(\frac{2}{3}h - y\right)\left(y + \frac{h}{3}\right) \tag{6.35}$$

y, por tanto,

$$\tau^{\text{cont}} = \frac{\tau_{xy}}{\cos\beta} = \left[1 + \left(\frac{b}{2h}\right)^2\right]^{1/2} \frac{12T}{bh^3}\left(\frac{2}{3}h - y\right)\left(y + \frac{h}{3}\right) \tag{6.36}$$

6.5 Secciones de pequeño espesor

6.5.1 Secciones abiertas

En las secciones de pequeño espesor abiertas, la teoría de la cortadura de Collignon permite determinar con mucha precisión la distribución de las tensiones tangenciales debidas al esfuerzo cortante.

A efectos de aplicar la fórmula de Collignon, consideremos la rebanada como la de la Figura 6.14, dividida por una superficie plana $BBB'B'$, paralela al eje de la pieza y

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

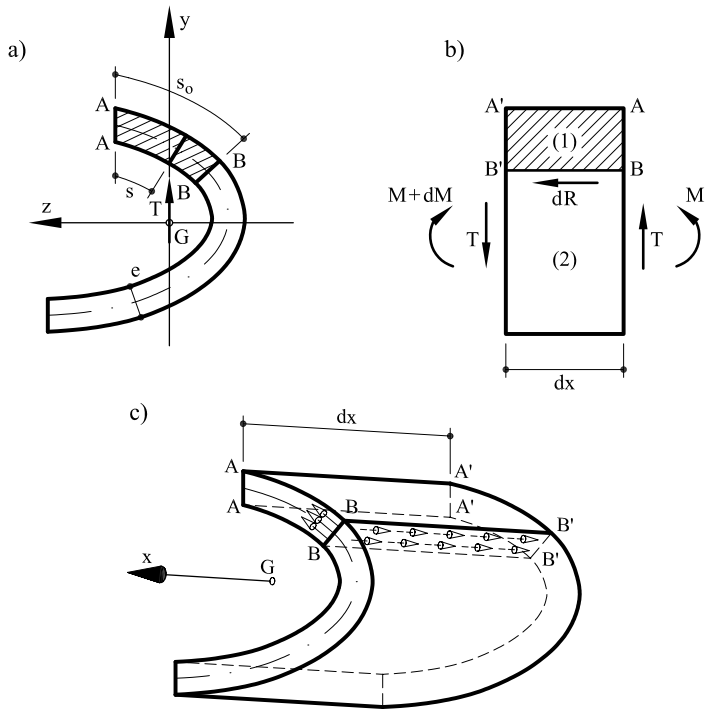

Fig. 6.14: Sección abierta de pequeño espesor sometida a cortante

tal que su traza sobre la sección sea una recta BB normal a la línea media que define la forma de la sección (línea a trazos en las Figuras 6.14a y c). De esta manera la fórmula nos proporcionará el valor de la tensión tangencial media *normal* a BB, es decir, en la dirección de la línea media, o sea, *a través del espesor.*

Al ser el espesor pequeño, se puede suponer sin gran error que la distribución de tensiones tangenciales es uniforme a través del espesor. Además, se puede admitir que para todo punto de la línea BB las tensiones tangenciales tienen la misma dirección, que debe ser coincidente en los puntos B con la tangente al contorno, es decir, tangente a la línea media si la variación del espesor es lenta y gradual. Por tanto, la tensión media que proporciona la fórmula de Collignon es una buena aproximación de las tensiones reales que se producen a través del espesor en la sección.

En resumen, *en perfiles de pequeño espesor se puede considerar, con mucha aproximación, que las tensiones tangenciales son, en todo punto, paralelas a la línea media de la sección, y que su distribución es constante a través del espesor. La dirección de la tensión tangencial en un punto depende* ***sólo*** *de la forma de la sección, y no de la dirección del esfuerzo cortante.*

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Consideremos, a efectos de desarrollo, el caso de una pieza prismática de sección abierta de pequeño espesor, sometida a un esfuerzo cortante actuando según el eje principal de inercia y de la sección, $T_y = T$, tal como la de la Figura 6.14. Situaremos la posición de la línea BB en la que queremos calcular las tensiones tangenciales definiendo la longitud de arco $s = s_0$, medida a lo largo de la línea media a partir de uno de sus extremos, por ejemplo, el A. Admitiremos que el espesor de la sección pueda variar a lo largo de la línea media, en función de la longitud de arco s.

En estas condiciones, la fórmula de Collignon nos dice que la tensión tangencial en la dirección de la línea media vale a través de la línea BB, de espesor $e(s_o)$, es:

$$\tau(s_o) = \frac{T_y\, m_z^e(s_o)}{I_z\, e(s_o)} \tag{6.37}$$

donde $m_z^e(s_o)$ es el momento estático respecto al eje z del área rayada $AABB$. Considerando el área del perfil concentrada a lo largo de la línea media, se puede escribir que dicho momento es igual a:

$$m_z^e(s_o) = \int_0^{s_o} y(s)\, e(s)\, ds \tag{6.38}$$

donde s_0 es la longitud de arco entre A y B. Esta expresión es suficientemente precisa si el espesor e es pequeño respecto a s_o. El sentido de las tensiones tangenciales puede deducirse sin ambigüedad a partir de las consideraciones de equilibrio expuestas en apartados anteriores y que se presentan en la Figura 6.14.

Estudiemos a continuación algunas secciones abiertas de pequeño espesor de interés práctico.

Sección en doble T

Estudiemos el caso de una sección en doble T simétrica sometida a un esfuerzo cortante T vertical ascendente (ver Figura 6.15a), y calculemos en primer lugar las componentes verticales de la tensión tangencial, τ_{xy}, y luego las componentes horizontales, τ_{xz}, que éste produce.

La componente vertical de la tensión tangencial τ_{xy} se calcula aplicando la fórmula de Collignon a cortes horizontales de la sección, tal como se muestra en la Figura 6.15b. Entonces:

$$\tau_{xy} = \frac{T\ m_z^e}{I_z\, l} \tag{6.39}$$

donde l es la "anchura" del corte. Se deduce, por tanto, que al pasar del ala al alma, el valor de τ_{xy} experimenta una fuerte discontinuidad, ya que l pasa de ser $l = b$ en el ala, a ser $l = e$ en el alma (ver Figura 6.15b). Dado que el espesor es pequeño, $e << b$,

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

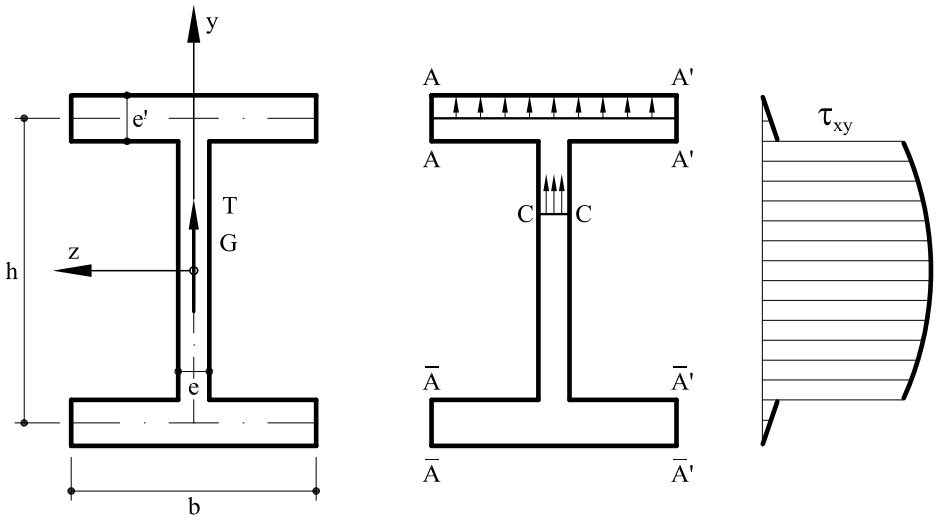

Fig. 6.15: Sección en doble T sometida a esfuerzo cortante según el alma. Tensiones tangenciales verticales

en las alas la tensión cortante *vertical* es despreciable frente a la del alma y el alma absorbe prácticamente en su totalidad el esfuerzo cortante vertical T.

En el alma, τ_{xy} varía como lo hace $m_z^e(y)$, en función de la ordenada y. Esta variación es parabólica y simétrica (ver Figura 6.15c):

$$m_z^e(y) = be'\frac{h}{2} + \left(\frac{h}{2} - y\right) e\,\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+y\right) = be'\frac{h}{2} + \frac{e}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{6.40}$$

El valor mínimo de las tensiones verticales en el alma se da en los puntos extremos de ésta, B y B', para $y = \pm\, h/2$, y vale

$$\tau_{xy}^{\min} = \frac{T}{I_z\, e}\left(be'\frac{h}{2}\right) \tag{6.41}$$

mientras que el valor máximo se da a la altura del baricentro, G, para $y = 0$, y vale

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{T}{I_z\, e}\left(be'\frac{h}{2} + \frac{e}{2}\frac{h^2}{4}\right) \tag{6.42}$$

Como se verá en el Ejercicio 6.5.1.1, la diferencia entre los valores mínimos (en B y B') y máximo (en G) de la parábola es pequeña para los perfiles normalizados. En este caso, puede considerarse que la distribución de tensiones tangenciales verticales es

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

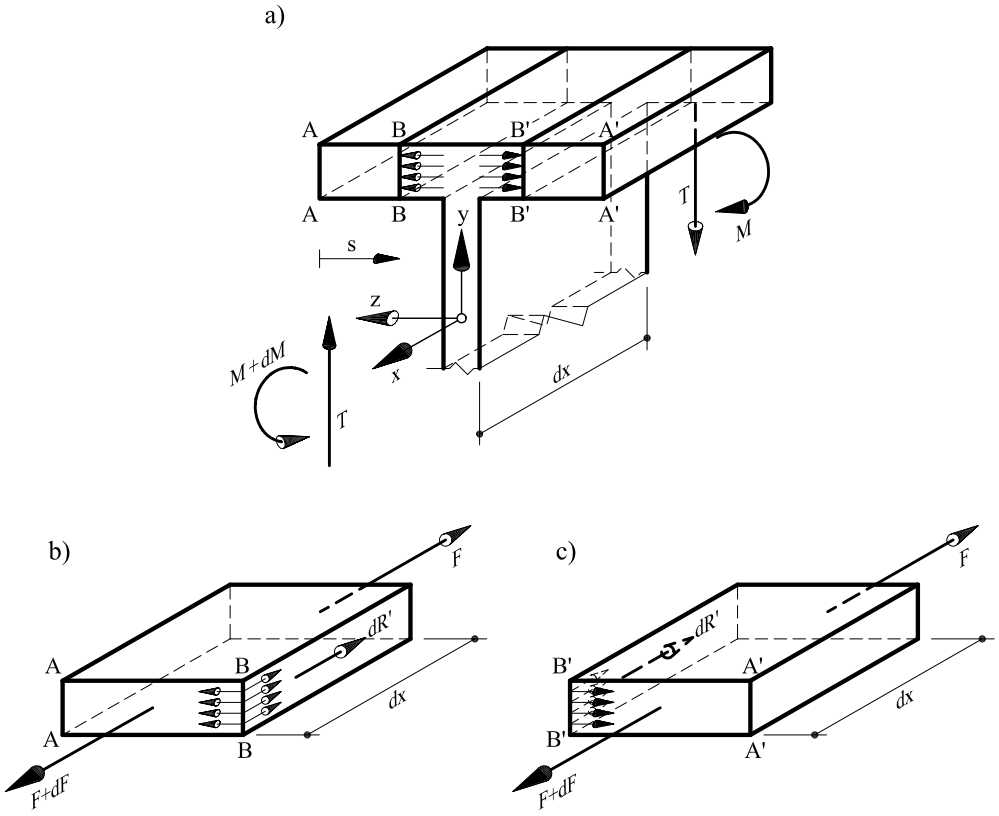

Fig. 6.16: Sección en doble T sometida a cortante. Tensiones tangenciales horizontales

uniforme en el alma, con un valor de:

$$\tau_{xy} \simeq \tau_{xy}^{\text{med}} = \frac{T}{\Omega_{\text{alma}}} \tag{6.43}$$

donde $\Omega_{\text{alma}} = he$ es el área del alma. Esta aproximación implica errores menores del 10 % en los valores máximos para perfiles normalizados, *por defecto*. El sentido de las tensiones tangenciales τ_{xy} en el alma coincide, naturalmente, con el del esfuerzo cortante T.

Por tanto, las tensiones verticales τ_{xy} en las alas son despreciables, pero no así las componentes horizontales τ_{xz}, que pueden calcularse de forma análoga a las anteriores, aplicando la fórmula de Collignon a cortes verticales de la sección (Figura 6.16).

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

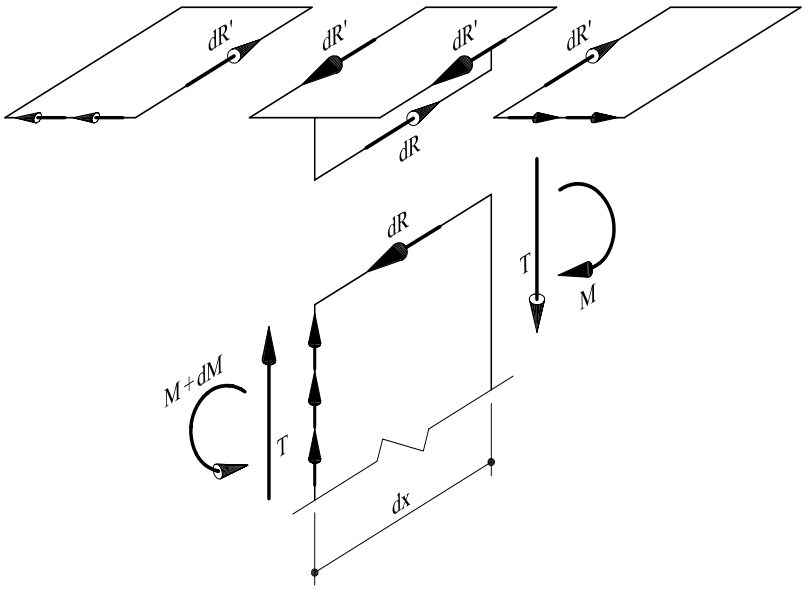

Fig. 6.17: Sección en doble T sometida a cortante. Sentidos de las tensiones tangenciales y rasantes

Entonces:

$$\tau_{xz} = \frac{T\, m_z^e(s)}{I_z\, e'} \tag{6.44}$$

donde $m_z^e(s) = se'h/2$ es el momento estático del área rayada $AABB$ respecto al eje z. Admitiremos, por ser el espesor pequeño, que las tensiones a lo largo de BB son paralelas y uniformes. Siendo T, I_z y e' constantes y variando $m_z^e(s)$ linealmente con s, la distribución de tensiones tangenciales en las alas será lineal, con valor nulo en los extremos. El sentido de las τ_{xz} se determina sin ambigüedad por consideraciones de equilibrio, tal y como se muestra en las Figuras 6.16 y 6.17.

La Figura 6.17 muestra las fuerzas rasantes diferenciales en el punto de unión del ala superior con el alma. Debe cumplirse, por equilibrio de fuerzas en la dirección del eje x, que:

$$dR = 2dR' \tag{6.45}$$

donde dR es la fuerza rasante en el extremo superior del alma y dR' es cada una de las fuerzas rasantes en las alas, y que son iguales entre sí por simetría de la sección y antisimetría de la solicitación respecto del eje y. Se tiene:

$$\tau_{\text{alma}}\, e\, dx = 2\, \tau_{\text{ala}}\, e'\, dx \tag{6.46}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

siendo τ_{alma} y τ_{ala} las tensiones tangenciales en el alma y en las alas en el punto de unión, respectivamente. Por tanto, por equilibrio se debe cumplir la siguiente relación entre ambos valores:

$$\frac{\tau_{\text{alma}}}{\tau_{\text{ala}}} = \frac{2e'}{e} \tag{6.47}$$

La distribución final de tensiones tangenciales (con sus correspondientes sentidos) se muestra en la Figura 6.18. En el ala inferior las tensiones tangenciales son antisimétricas de las del ala superior, por simetría de la sección y antisimetría de la solicitación respecto del eje z. Se observa en ella que, según las aproximaciones realizadas, se cumple que la dirección de la tensión tangencial en un punto de la sección depende de la forma de la sección, y no de la dirección del esfuerzo cortante, según se adelantó al principio del presente apartado.

Puede comprobarse también que la distribución de tensiones hallada satisface las ecuaciones de equilibrio interno. Llamemos R y V a las resultantes de las tensiones tangenciales en las alas y en el alma, respectivamente; su valor puede calcularse fácilmente hallando el área de los diagramas de tensiones tangenciales y multiplicando por el espesor correspondiente. En el alma, la resultante V vale:

$$V = \frac{T}{I_z\, e}\left(be'\frac{h}{2} + \frac{2}{3}\frac{e}{2}\frac{h^2}{4}\right) h\, e \tag{6.48a}$$

$$= \frac{T}{I_z}\left(\frac{be'h^2}{2} + \frac{eh^3}{12}\right) \tag{6.48b}$$

$$= T \tag{6.48c}$$

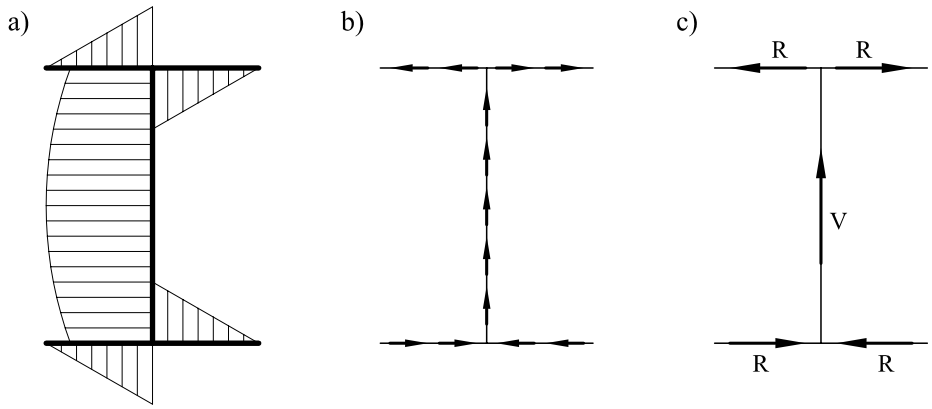

Fig. 6.18: Distribución de tensiones tangenciales en sección en doble T sometida a esfuerzo cortante

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

ya que el momento de inercia del perfil, despreciando el momento de inercia propio de las alas, vale:

$$I_z \simeq \frac{be'h^2}{2} + \frac{eh^3}{12} \tag{6.49}$$

Por otra parte, es obvio, por simetría, que la resultante total de las tensiones tangenciales horizontales en las alas es nula, como corresponde al hecho de que $T_z = 0$.

Ejercicio 6.5.1.1

Comprobar que las tensiones verticales en el alma de un perfil laminado en doble T se reparten de forma aproximadamente uniforme sobre el área del alma.

Llamemos Ω_{alma} y Ω_{ala} al área del alma y el ala de la sección, respectivamente, y definamos la relación $\lambda = \Omega_{alma}/\Omega_{ala}$ entre ellas. Si los espesores del alma y del ala, e y e', son pequeños frente al canto y ancho de la sección, h y b, entonces (ver Figura 6.15):

$$I_z \simeq 2\Omega_{\text{ala}} \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\Omega_{\text{alma}} h^2 = \frac{h^2}{2}\Omega_{\text{ala}} \left(1 + \frac{\lambda}{6}\right)$$

y también:

$$\begin{aligned} m_z^e(B) &\simeq \frac{h}{2}\Omega_{\text{ala}} \\ m_z^e(G) &\simeq \frac{h}{2}\Omega_{\text{ala}} + \frac{h}{8}\Omega_{\text{alma}} = \frac{h}{2}\Omega_{\text{ala}} \left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, los valores máximo y mínimo de la tensión tangencial en el alma son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{\max} &= \tau_{xy}(G) = \frac{T m_z^e(G)}{I_z e} \\ &\simeq \frac{T\frac{h}{2}\Omega_{\text{ala}}\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)}{\frac{h^2}{2}\Omega_{\text{ala}}\left(1+\frac{\lambda}{6}\right)e} \\ &= \frac{T}{\Omega_{\text{alma}}}\frac{1+\frac{\lambda}{4}}{1+\frac{\lambda}{6}} \\ \tau_{xy}^{\min} &= \tau_{xy}(B) = \frac{T\, m_z^e(B)}{I_z e} \\ &\simeq \frac{T\frac{h}{2}\Omega_{\text{ala}}}{\frac{h^2}{2}\Omega_{\text{ala}}\left(1+\frac{\lambda}{6}\right)e} \\ &= \frac{T}{\Omega_{\text{alma}}}\frac{1}{1+\frac{\lambda}{6}} \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Para los perfiles normalizados se tiene, por ejemplo:

$$\text{IPE 200} \quad \lambda = 1,21 \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau_{xy}^{\max}}{\tau_{xy}^{\min}} = 1,30 \quad \frac{\tau_{xy}^{\max}}{\tau_{xy}^{\text{med}}} = 1,08$$

$$\text{HEB 200} \quad \lambda = 0,51 \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau_{xy}^{\max}}{\tau_{xy}^{\min}} = 1,13 \quad \frac{\tau_{xy}^{\max}}{\tau_{xy}^{\text{med}}} = 1,04$$

lo que demuestra la validez de considerar la distribución aproximadamente uniforme y de valor:

$$\tau_{xy} \simeq \tau_{xy}^{\text{med}} = \frac{T}{\Omega_{\text{alma}}}$$

El error cometido es menor de un 10 % (*por defecto*) siempre que la relación $\lambda = \Omega_{\text{alma}}/\Omega_{\text{ala}} < 1,5$.

Ejercicio 6.5.1.2

Determinar la distribución de las tensiones tangenciales en la sección en doble T de la Figura 6.19 cuando actúa sobre ella un esfuerzo cortante T en la dirección del eje z.

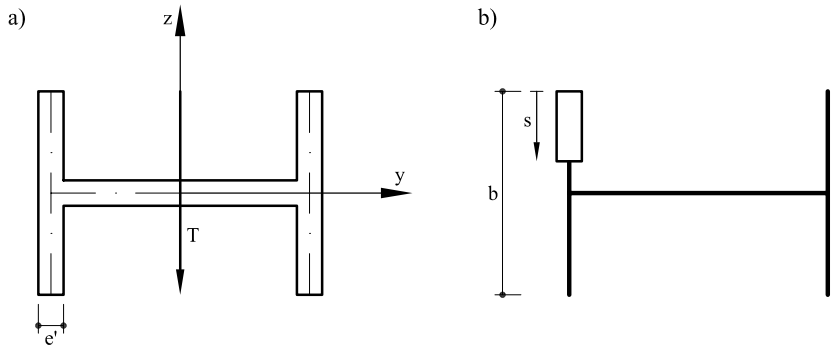

Fig. 6.19: Sección en doble T sometida a cortante transversal

El momento de inercia de la sección respecto al eje y es:

$$I_y = 2\frac{b^3 e'}{12} = \frac{1}{6} b^3 e'$$

El momento estático para una porción de las alas de longitud s (Figura 6.19b) es:

$$m_y^e(s) = \frac{e' s}{2}(b - s)$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

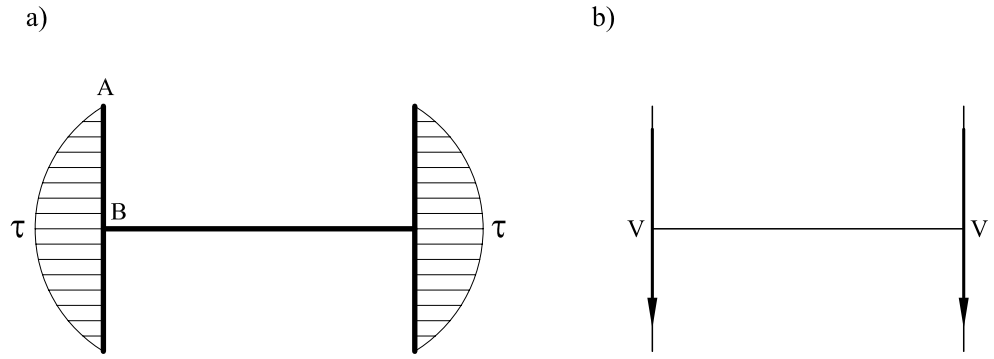

Fig. 6.20: Distribución de tensiones tangenciales en sección en doble T sometida a cortante transversal

Por tanto, las tensiones tangenciales en las alas son iguales a:

$$\tau_{xz}(s) = \frac{T\, m_y^e(s)}{I_y\, e'} = \frac{T}{I_y}\frac{1}{2}s\,(b-s)$$

Por tanto, las tensiones tangenciales varían parabólicamente a lo largo de las alas, desde un valor nulo para $s = 0$ y $s = b$ hasta un valor máximo en la unión del alma igual a:

$$\tau_{\max} = \tau\,\left(s = \frac{b}{2}\right) = \frac{T\, b^2}{8\, I_y} = \frac{3}{2}\frac{T/2}{be'} = \frac{3}{2}\frac{T/2}{\Omega_{\text{ala}}}$$

Este resultado podía intuirse ya que el esfuerzo cortante T está tomado exclusivamente por las alas.

El valor de V, resultante de las tensiones tangenciales en las alas, puede calcularse hallando el área de los diagramas de tensiones tangenciales y multiplicando por el espesor e':

$$V = \frac{2}{3}be'\tau_{\max} = \frac{T}{2}$$

Sección en U

Consideremos una viga de sección en U, sometida a esfuerzo cortante T de dirección paralela a su alma y de sentido ascendente. Sea h la altura del perfil y b la anchura de las alas, e' el espesor de las alas y e el espesor del alma. Utilizando razonamientos

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

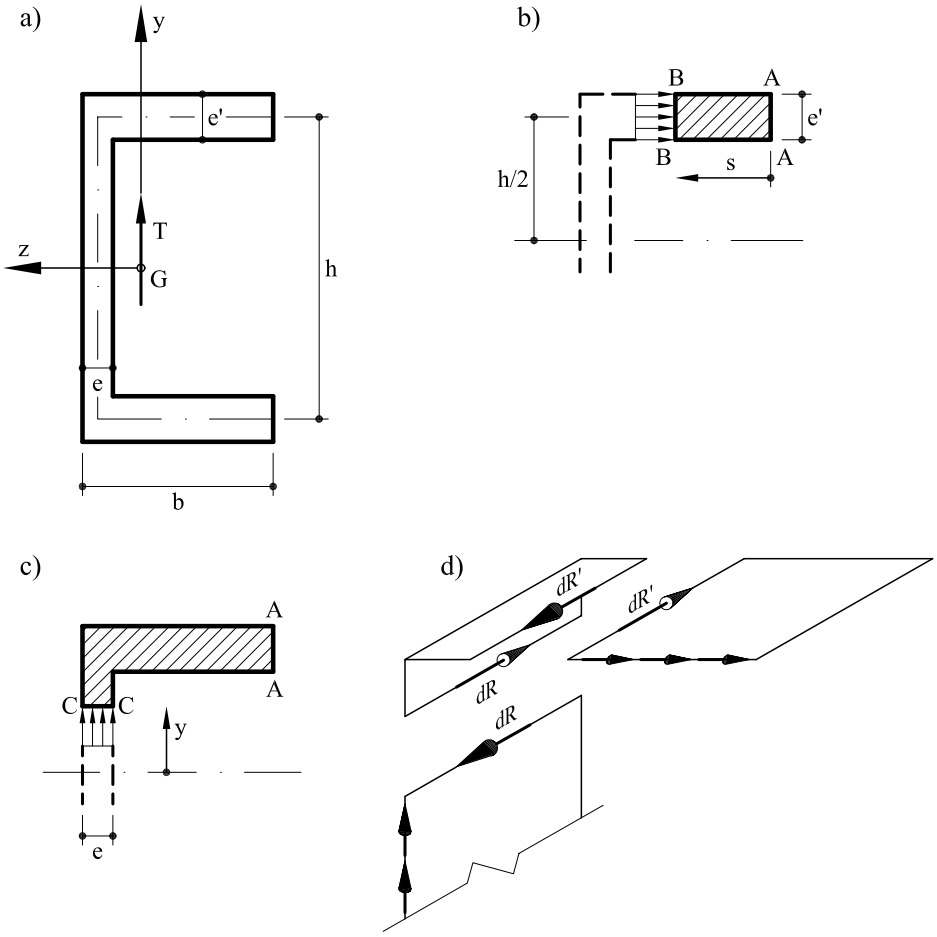

Fig. 6.21: Sección en U sometida a cortante

análogos a los usados en la Sección anterior, la tensión tangencial debida al cortante T en el punto B del ala superior (ver Figura 6.21) se puede calcular como:

$$\tau(s) = \frac{T\, m_z^e(s)}{I_z\, e'} \tag{6.50}$$

con $m_z^e(s) = se'h/2$ para $e' << h$. En consecuencia:

$$\tau_{xz}(s) = \frac{T}{I_z}\frac{sh}{2} \tag{6.51}$$

Se observa que las tensiones tangenciales a lo largo del ala varían linealmente desde un

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

valor nulo en el extremo A hasta un valor máximo en la unión con el alma igual a:

$$\tau(s=b) = \frac{T}{I_z}\frac{bh}{2} \tag{6.52}$$

El sentido de las tensiones tangenciales viene dado por el equilibrio de las fuerzas normales que actúan sobre el área rayada y las fuerzas rasantes, tal como se indica en la Figura 6.21b.

La misma expresión se obtiene para el ala inferior, salvo que las tensiones rasantes y cortantes tienen sentido contrario a las del ala superior.

Si deseamos calcular las tensiones tangenciales en el alma, por ejemplo en un punto C situado a una distancia y por encima del eje z, el momento estático en este caso es:

$$m_z^e(y) = be'\frac{h}{2} + e\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) \tag{6.53}$$

luego:

$$\tau(y) = \frac{Tbe'h}{2I_z e} + \frac{Th^2}{8I_z}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right] \tag{6.54}$$

Como puede deducirse de la expresión anterior, la variación de las tensiones tangenciales en el alma es simétrica y parabólica, con un valor máximo en el eje z ($y = 0$) que es igual a:

$$\tau_{xy}^{\max} = \tau_{xy}\,(y=0) = \frac{Tbe'h}{2I_z e} + \frac{Th^2}{8I_z} \tag{6.55}$$

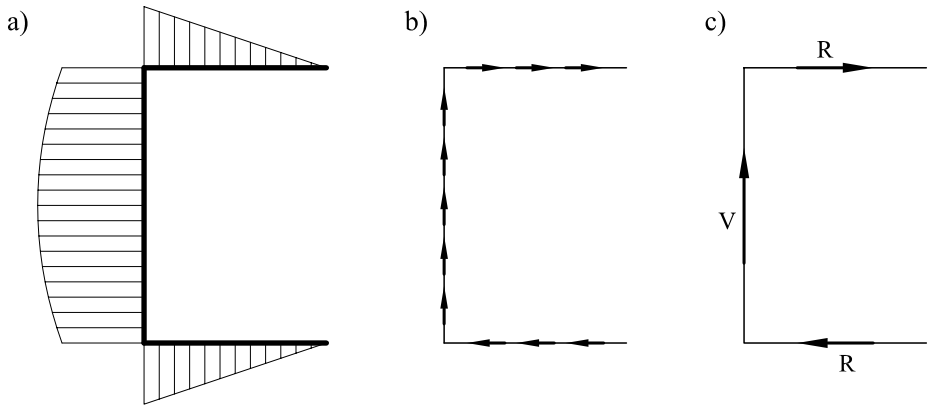

Fig. 6.22: Distribución de tensiones tangenciales en sección en U sometida a cortante

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Llamemos R y V a las resultantes de las tensiones tangenciales en las alas y en el alma, respectivamente (Figura 6.22); su valor puede calcularse fácilmente hallando el área de los diagramas de tensiones tangenciales y multiplicando por el espesor correspondiente. En el alma, la resultante V vale:

$$V = \frac{Tbe'h^2}{2I_z} + \frac{Teh^3}{12I_z} \tag{6.56a}$$

$$= \frac{T}{I_z}\left(\frac{be'h^2}{2} + \frac{eh^3}{12}\right) \tag{6.56b}$$

$$= T \tag{6.56c}$$

ya que el momento de inercia del perfil, despreciando el momento de inercia propio de las alas, vale:

$$I_z \simeq \frac{be'h^2}{2} + \frac{eh^3}{12} \tag{6.57}$$

Se observa que el alma toma enteramente el esfuerzo cortante, con contribución despreciable de las alas, que, sin embargo, están sometidas a tensiones tangenciales horizontales. Las resultantes de estas tensiones en las alas, R, deben ser iguales y de sentidos opuestos, por equilibrio, ya que $T_z = 0$.

De manera análoga se demuestra que en el caso de la sección en U sometida a la acción de un cortante transversal según su eje principal z, tal como se muestra en la Figura 6.23, la distribución de tensiones tangenciales es la de la Figura 6.24. En este caso, la distribución a lo largo de las alas es parabólica, con un máximo en las secciones situadas en el corte con el eje y ($z = 0$). Se puede comprobar que las resultantes de las tensiones sobre cada una de las alas valen en este caso $V = T/2$.

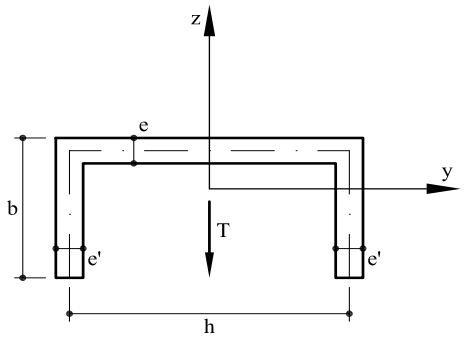

Fig. 6.23: Sección en U sometida a cortante transversal

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

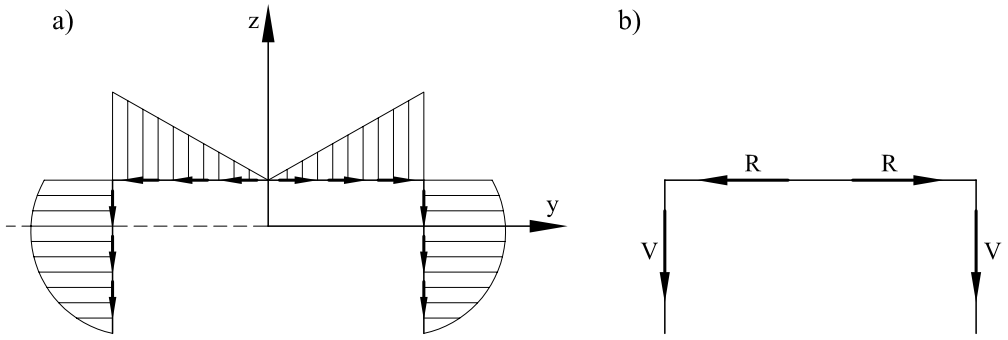

Fig. 6.24: Distribución de tensiones tangenciales en sección en U sometida a cortante transversal

6.5.2 Secciones cerradas

El problema general de determinar la distribución de tensiones tangenciales producidas por un esfuerzo cortante en una sección cerrada de pequeño espesor es hiperestático, dado que no se puede determinar el valor de las tensiones tangenciales, a lo largo de un único corte a través del espesor, utilizando sólo consideraciones de equilibrio.

El procedimiento para resolver estos casos es como sigue. Considérese la sección cerrada de la Figura 6.25, sometida a un esfuerzo cortante según uno de sus ejes principales de inercia. Supongamos que la tensión tangencial debida a este cortante sobre un corte AA, de posición arbitraria, a través del espesor e_o, es uniforme y tiene un valor τ_o, desconocido. El correspondiente flujo tangencial vale $q_o = \tau_o e_o$. Entonces, tal como se indica en la Figura 6.25, la tensión τ en un punto genérico de la sección se puede expresar como

$$\tau\left(s\right) = \tau_a\left(s\right) + \tau_o \frac{e_o}{e(s)} \tag{6.58}$$

donde s mide la posición del punto genérico respecto del corte aa' y $\tau_a\left(s\right)$ representa la tensión en dicho punto sobre una sección de igual geometría, *pero abierta por el corte* AA. Esto es así porque la resultante de una distribución de tensiones tangenciales con flujo constante $q = q_o$ es obviamente nula, ya que la integral cerrada $\oint \overrightarrow{q} ds \equiv 0$ es idénticamente nula.

Consideremos ahora la deformación que esta distribución de tensiones tangenciales produce sobre la sección. Según se muestra en la Figuras 6.26c y d, se produce sobre los elementos diferenciales tales como el indicado una distorsión angular de valor $\gamma = \tau/G$, donde G es el módulo de rigidez transversal del material. Esta distorsión provoca un

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

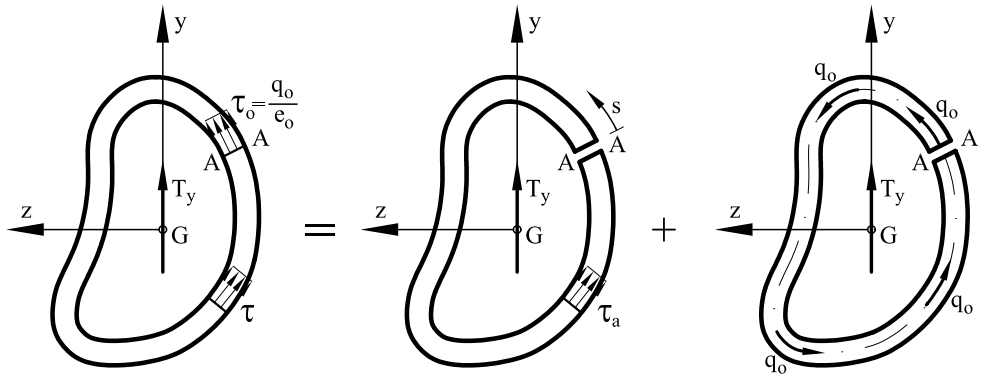

Fig. 6.25: Determinación de las tensiones tangenciales en una sección cerrada

movimiento diferencial de la sección, en la dirección longitudinal x, perpendicular a la sección, de valor

$$\begin{aligned} d\delta &= \gamma\, ds && (6.59a)\\ &= \frac{\tau}{G}\, ds && (6.59b)\\ &= \frac{1}{G}\left(\tau_a\,(s) + \tau_o \frac{e_o}{e(s)}\right)\, ds && (6.59c) \end{aligned}$$

Dado que la sección es cerrada el movimiento longitudinal total debe ser nulo, y se puede escribir:

$$\begin{aligned} \delta &= \oint d\delta && (6.60a)\\ &= \oint \frac{\tau_a}{G}\, ds + \tau_o e_o \oint \frac{ds}{G\, e} && (6.60b)\\ &= \delta_a + \delta_o && (6.60c)\\ &= 0 && (6.60d) \end{aligned}$$

de donde se puede obtener el valor incógnita τ_o que resuelve el problema, en la forma:

$$\tau_o = -\frac{\oint \frac{\tau_a}{G}\, ds}{e_o \oint \frac{ds}{G\, e}} \qquad (6.61)$$

Obsérvese que el valor de τ_o es tal que provoca una distorsión uniforme en la sección que compensa exactamente el valor del movimiento longitudinal que se produciría en la sección "abierta" δ_a.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

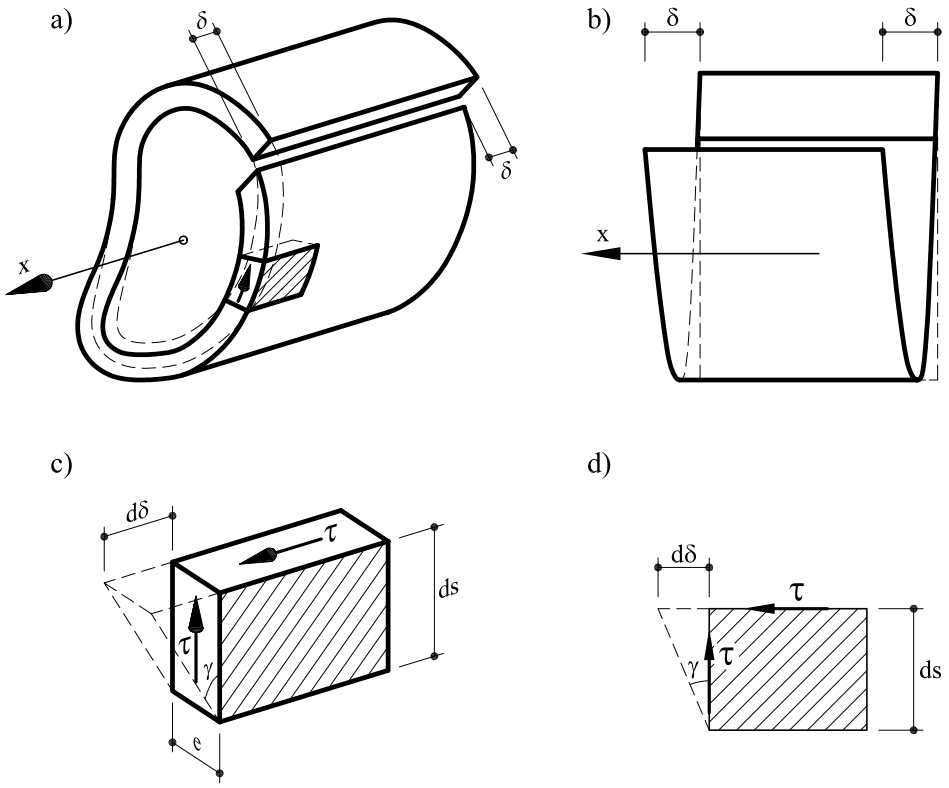

Fig. 6.26: Distorsión producida por las tensiones tangenciales en una sección abierta

La ecuación de compatibilidad (6.60a)-(6.60d) contempla que el módulo de rigidez transversal sea variable a lo largo de la línea media de la sección; por tanto, la expresión (6.61) es aplicable a secciones de varios materiales (ver también la Sección 6.9 para la determinación de la distribución τ_a en este caso). En el caso de secciones homogéneas la expresión (6.61) puede obviamente simplificarse.

Por último, cabe señalar que es posible generalizar el tratamiento aquí descrito a secciones multicelulares. El problema de determinar las tensiones tangenciales debidas a un esfuerzo cortante sobre una sección m-celular es m veces hiperestático. Se resuelve introduciendo m flujos incógnita $q = q_i, i = 1, ..., m$ a través de unos cortes, de localización arbitraria, que abran las respectivas células. Las m ecuaciones de compatibilidad que resuelven el problema se obtienen al imponer que los desplazamientos longitudinales de las células sean nulos, esto es, $\delta_i = \oint_i d\delta = 0,\ i = 1, ..., m$.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ejercicio 6.5.2.1

Determinar la distribución de tensiones tangenciales sobre la sección rectangular hueca de la Figura 6.27 (dimensiones en cm) sometida a un esfuerzo cortante vertical de valor $T_y = 10^5$ N.

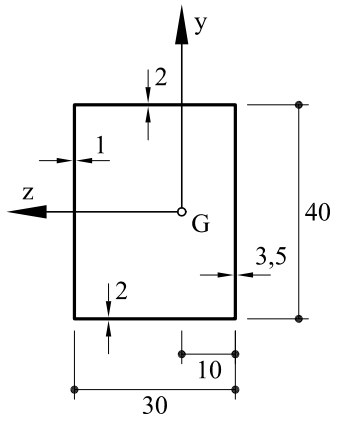

Fig. 6.27: Sección rectangular hueca sometida a cortante

El momento de inercia de la sección respecto del eje z es:

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{1}{12}40^3 \cdot 1 + \frac{1}{12}40^3 \cdot 3,5 + 2 \cdot (2 \cdot 30) \cdot 20^2 + 2 \cdot \frac{1}{12}2^3 \cdot 30 \\ &= 72.040 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Consideremos ahora un corte a traves de la esquina A, con un flujo incógnita $q_o = \tau_o e_o$, tal como se muestra en la Figura 6.28. La distribución de tensiones tangenciales sobre la correspondiente sección abierta τ_a se muestra en la Figura 6.28a; es simétrica respecto del eje z, con los valores:

$$\begin{aligned} \tau_a^1 &= \frac{10^5 \cdot (30 \cdot 2) \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{72 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \text{ Pa } = 8,333 \text{ MPa} \\ \tau_a^2 &= \frac{10^5 \cdot [(30 \cdot 2) \cdot 20 + (20 \cdot 1) \cdot 10] \cdot 10^{-6}}{72 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} \text{ Pa } = 19,444 \text{ MPa} \\ \tau_a^3 &= \frac{10^5 \cdot (20 \cdot 3,5) \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{72 \cdot 10^{-5} \cdot 3,5 \cdot 10^{-2}} \text{ Pa } = 2,777 \text{ MPa} \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

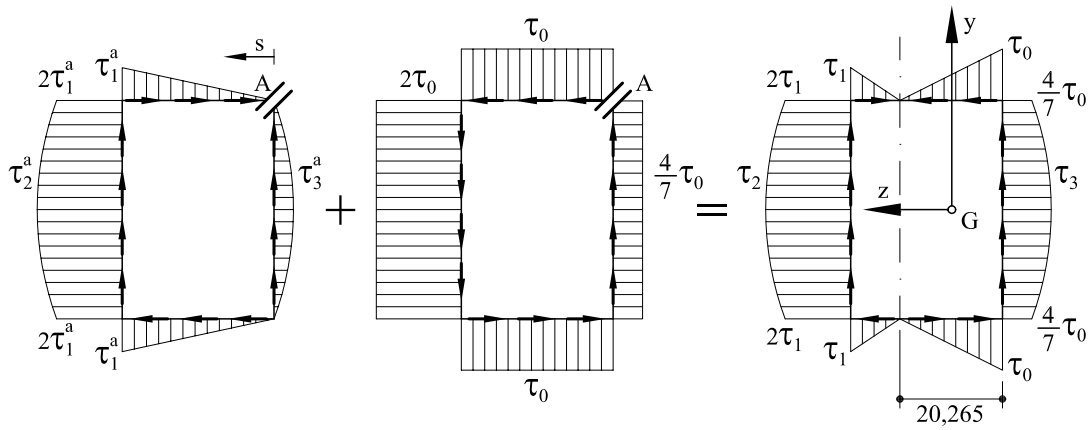

Fig. 6.28: Distribución de tensiones en sección rectangular hueca

A partir de estos resultados se puede calcular la integral

$$\begin{aligned}\oint \tau_a \, ds &= -\left[2\left(\frac{1}{2}\cdot 8,333\cdot 30\right)+(16,666\cdot 40)+\frac{2}{3}\cdot 2,777\cdot 40\right]\cdot 10^4 \\ &\quad +\frac{2}{3}\cdot 2,777\cdot 40\cdot 10^4 \\ &= -9,166\cdot 10^6 \text{ N/m}\end{aligned}$$

El valor de τ_o se obtiene aplicando la expresión (6.61), debidamente simplificada:

$$\begin{aligned}\tau_o &= -\frac{\oint \tau_a \, ds}{e_o \oint \frac{ds}{e}} \\ &= \frac{9,166\cdot 10^6}{2\left(2\cdot\frac{30}{2}+\frac{40}{1}+\frac{40}{3,5}\right)\cdot 10^{-2}} \text{ Pa} \\ &= 5,629 \text{ MPa}\end{aligned}$$

La distribución final de tensiones tangenciales sobre la sección cerrada se muestra en la Figura 6.28, con los valores $\tau_1 = 2,705$ MPa, $\tau_2 = 8,187$ MPa y $\tau_3 = 5,994$ MPa.

Secciones cerradas simétricas

En el caso particular de que la sección sea simétrica respecto del eje de actuación del esfuerzo cortante, la distribución de tensiones tangenciales sí puede determinarse fácilmente utilizando la fórmula de Collignon.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

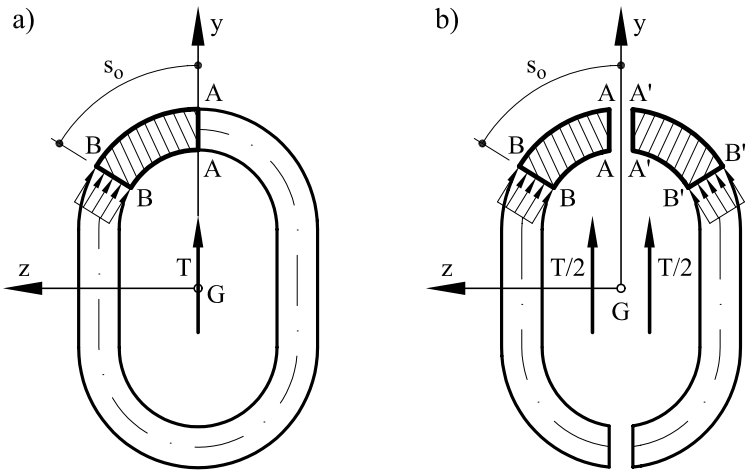

Fig. 6.29: Sección cerrada simétrica sometida a esfuerzo cortante

En este caso, por simetría, las tensiones rasantes sobre el plano de simetría deben ser nulas. Recíprocamente, la tensiones tangenciales en cortes de la sección situados sobre el eje de simetría deben ser nulas. Por tanto, a efectos de cálculo, la sección puede considerarse como dos medias secciones abiertas, trabajando de forma yuxtapuesta.

De esta manera, en un corte cualquiera BB perpendicular a la línea media de la sección, las tensiones tangenciales τ serán paralelas a la línea media de la sección, de distribución uniforme a través del espesor y de módulo igual a:

$$\tau(s_o) = \frac{T/2\; m_z^e\,(s_o)}{I_z/2\; e\,(s_o)} = \frac{T\, m_z^e(s_o)}{I_z\, e(s_o)} \tag{6.62}$$

donde $m_z^e(s_o)$ es el momento estático del área $AABB$ respecto al eje z. En la fórmula, I_z es el momento de inercia total de la sección respecto al eje z. Si el sentido del esfuerzo cortante T es ascendente los sentidos de las tensiones tangenciales serán los de la Figura 6.29.

Tomemos, por ejemplo, la sección tubular rectangular de la Figura 6.30a, de canto h y ancho $2b$, sometida a esfuerzo cortante ascendente de valor T. Dada la simetría de la sección y de la solicitación, puede analizarse como se muestra en la Figura 6.30b, esto es, como dos secciones en U, de canto h y ancho b, trabajando yuxtapuestas y soportando un cortante mitad $T/2$ cada una de ellas. La distribución de tensiones sobre cada una de ellas es análoga a la mostrada en la Figura 6.22. Obsérvese que las tensiones tangenciales sobre el eje de simetría son nulas.

Análogamente se puede analizar la sección tubular rectangular bicelular de la Figura 6.30c, de canto h y ancho $4b$, sometida a esfuerzo cortante ascendente de valor T.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

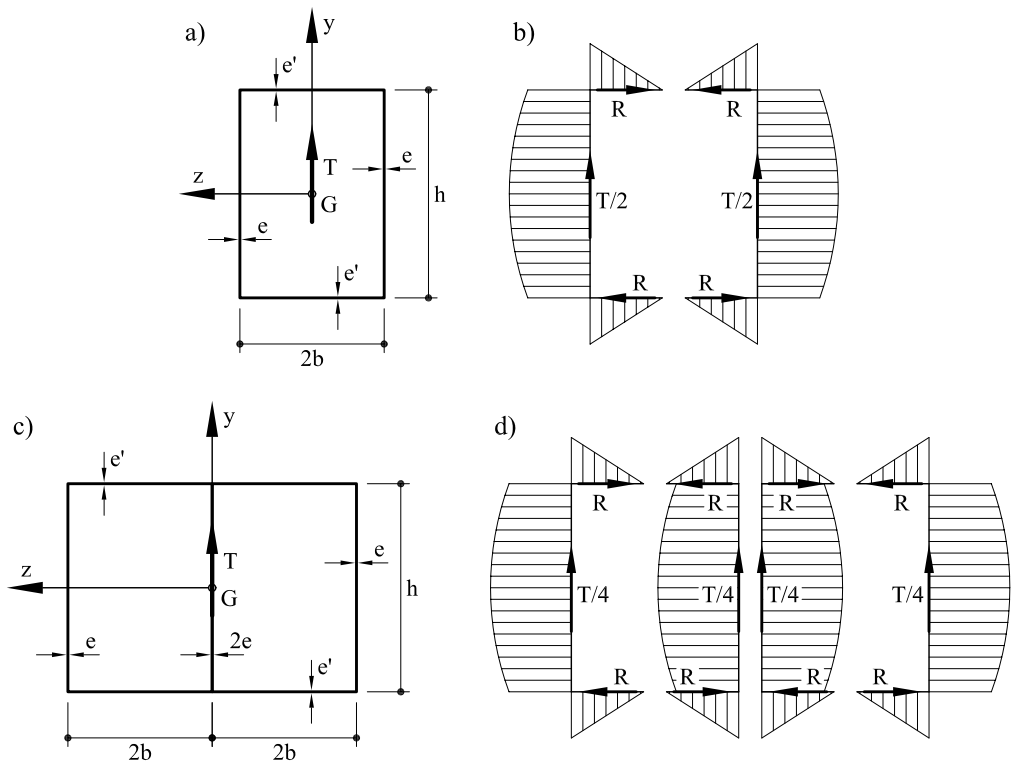

Fig. 6.30: Secciones cerradas simétricas sometidas a esfuerzos cortantes según el eje de simetría

Obsérvese que el alma central tiene doble espesor que las almas laterales. Dada la simetría de la sección y de la solicitación, puede analizarse como se muestra en la Figura 6.30d, esto es, como cuatro secciones en U, de canto h y ancho b, trabajando yuxtapuestas y soportando un cortante mitad $T/4$ cada una de ellas.

6.6 Deformación de alabeo

Si la distribución de la tensión tangencial debida a un esfuerzo cortante vertical T_y fuera uniforme en toda la sección, tal como se suponía en la teoría elemental de la cortadura, la deformación por distorsión de la rebanada sería también constante en la sección, tal como se muestra en la Figura 6.31a, y de valor:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{T_y}{G\,A} \tag{6.63}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

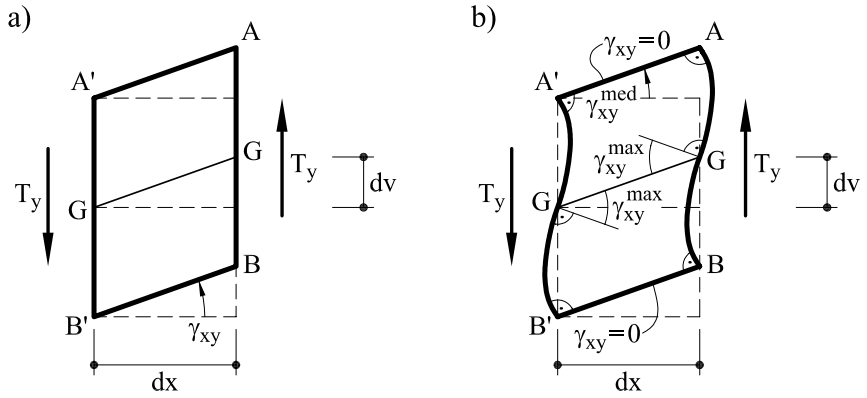

Fig. 6.31: Deformación de la rebanada debida al esfuerzo cortante: (a) teoría elemental, (b) teoría de Collignon

Sin embargo, si la tensión tangencial vertical varía en la sección de acuerdo con la fórmula de Collignon:

$$\tau_{xy} = \frac{T_y\, m_z^e(y)}{I_z\, l(y)} \tag{6.64}$$

resulta que las correspondientes distorsiones angulares γ_{xy} también varían según una ley análoga y, por esta razón, la sección no permanece plana, sino que sufre una deformación fuera de su plano, tal como se muestra en la Figura 6.31b. A este efecto se le denomina *alabeo de la sección.*

En las fibras extremas AA', BB', se tiene que $\tau_{xy} = 0$, la distorsión es nula $\gamma_{xy} = 0$ y los ángulos entre estas fibras y las secciones rectas se mantienen rectos. En las fibras en las que $\tau_{xy} \neq 0$ se produce distorsión angular, y el ángulo inicialmente recto entre las fibras longitudinales y la sección normal no se mantiene recto en la deformación. El grado de distorsión de estos ángulos varía de unas fibras a otras, según la distribución de tensiones tangenciales. En particular, para secciones rectangulares o circulares, en la fibra media GG' se dan las tensiones tangenciales máximas y, por tanto, la distorsión máxima γ_{xy}^{max}.

Si la viga es de sección constante y el esfuerzo cortante es uniforme, el alabeo será igual para todas las secciones. En esa situación, la deformación por esfuerzo cortante no implica variación de longitud de las fibras, y las expresiones para las tensiones normales obtenidas al estudiar la flexión pura (sin esfuerzo cortante), suponiendo que las secciones permanecen planas, siguen siendo válidas. En otras circunstancias es

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

necesario admitir que el *alabeo relativo* entre dos secciones próximas es despreciable (hipótesis generalizada de Bernoulli-Navier) para que tales expresiones mantengan su validez. Esto resulta admisible, ya que, en general, las deformaciones longitudinales debidas al alabeo relativo son mucho menores que las debidas a flexión, y tanto más cuanto más esbelta sea la pieza, es decir, cuanto mayor sea su relación luz/canto (ver también la Sección 4.4).

6.6.1 Área reducida de cortante

Aunque las secciones sometidas a esfuerzo cortante sufran alabeo, es útil evaluar el valor medio de la distorsión en la rebanada, definido a partir del movimiento transversal relativo de una sección respecto a otra infinitamente próxima (Figura 6.31), es decir:

$$\gamma_{xy}^{\text{med}} = \frac{dv}{dx} \tag{6.65}$$

Se llama *área reducida de cortante* de una sección en una cierta dirección al área equivalente sobre la que un cortante de esa dirección, *distribuido uniformemente,* produciría la misma distorsión media que en la sección real. Así por ejemplo, para la dirección y se puede escribir:

$$\gamma_{xy}^{\text{med}} = \frac{T_y}{G\,\Omega_y} = \frac{T_y}{G\,k_y A} \tag{6.66}$$

donde $\Omega_y = k_y A$ es el *área reducida de cortante según el eje y.* Al factor adimensional k_y se le llama *factor de cortante según el eje y.*

El área reducida para una sección dada se calcula mediante fórmulas empíricas, consideraciones estáticas o métodos energéticos. Utilizando estos últimos, se tiene que:

$$\Omega_y = \frac{I_z^2}{\displaystyle\int_S \left(\frac{m_z^e(y)}{b(y)}\right)^2 dS} \tag{6.67}$$

donde se observa que ésta es una característica geométrica de la sección.

Análogamente, para el otro eje principal de inercia de la sección se tendrá:

$$\Omega_z = \frac{I_y^2}{\displaystyle\int_S \left(\frac{m_y^e(z)}{b'(z)}\right)^2 dS} \tag{6.68}$$

Sección	rectangular	circular	anillo	doble T
Ω	$(5/6)\,A$	$(9/10)\,A$	$(1/2)\,A$	Ω_{alma}

Tabla 6.2: Valores del área reducida de cortante para diferentes secciones

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Los valores del área reducida de cortante para algunos de los tipos de secciones más usuales se muestran en la Tabla 6.2.

Ejercicio 6.6.1

Calcular el área reducida de cortante de una sección rectangular de dimensiones $h \times b$.

Se tiene, según la Sección 6.4.1, que $I_z = (1/12)\, bh^3$ y $m_z^e(y) = (1/2)\, b \left[(h/2)^2 - y^2\right]$. Por tanto:

$$\int_S \left(\frac{m_z^e(y)}{b}\right)^2 dS = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\left[\frac{1}{2}b(\frac{h^2}{4} - y^2)\right]^2}{b^2} b dy = \frac{1}{120} bh^5$$

y el área reducida a cortante del rectángulo según el eje principal y es:

$$\Omega_y = \frac{I_z^2}{\int_S (\frac{m_z^e(y)}{b})^2 dS} = \frac{(\frac{1}{12})^2 b^2 h^6}{\frac{1}{120} bh^5} = \frac{5}{6} A$$

6.7 Esfuerzo cortante esviado

Se dice que el esfuerzo cortante es *esviado* cuando actúa en una dirección diferente de la de los ejes principales de inercia de la sección. Esto ocurre cuando la *variación del momento flector* no está contenida en ninguno de los planos principales de flexión de la pieza.

6.7.1 Estudio en ejes principales

En esta situación puede descomponerse el esfuerzo cortante $\vec{T}$ en sus componente T_y, T_z según los ejes principales de inercia, tal como se muestra en la Figura 6.32. Aplicando el principio de superposición, se puede entonces hacer el estudio correspondiente a cada una de las componentes de forma independiente y obtener la distribución total de tensiones tangenciales sumando, para cada punto de la sección, las tensiones tangenciales debidas a cada una de las componentes. Es importante señalar que, según la Teoría de Collignon, *la dirección de la tensión tangencial en un punto no coincide, en general, con la dirección del esfuerzo cortante aplicado.* Por tanto, la superposición de resultados correspondientes a cada una de las componentes principales del esfuerzo

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

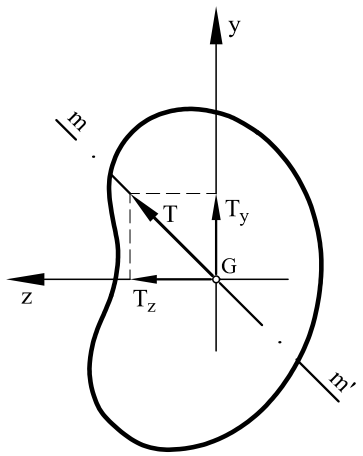

Fig. 6.32: Descomposición de un cortante esviado en sus componentes según los ejes principales

cortante implica la *suma vectorial* de las tensiones tangenciales obtenidas para cada uno de ellos:

$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\tau}(T_y) + \overrightarrow{\tau}(T_z) \tag{6.69}$$

donde $\overrightarrow{\tau}(T_y)$ y $\overrightarrow{\tau}(T_z)$ son las tensiones tangenciales debidas a las componentes del esfuerzo según los ejes pricipales T_y y T_z, respectivamente.

Así, por ejemplo, en la Figura 6.33a se muestra la descomposición de un esfuerzo cortante esviado que actúa sobre una sección rectangular maciza en sus respectivas componentes según los ejes principales de inercia, T_y y T_z, respectivamente. En la Figura 6.33b se muestran las distribuciones de tensiones (medias) que pueden calcularse para cada una de las componentes utilizando la fórmula de Collignon. Este es un caso particular en el que las tensiones que provoca cada una de las componentes del esfuerzo cortante sí se corresponden con la dirección del cortante correspondiente, es decir, la componente T_y provoca sólo componentes τ_{xy}, mientras que la componente T_z provoca sólo componentes τ_{xz}. El resultado de componer vectorialmente ambas distribuciones es el que se muestra en la Figura. En un punto genérico de la sección la tensión tangencial no tiene la dirección del cortante actuante. En particular, las tensiones sobre el contorno de la sección siguen la dirección de éste.

Recordemos, no obstante, que en las secciones de pequeño espesor, *la dirección de la tensión tangencial en un punto depende* ***sólo*** *de la forma de la sección, y no de la dirección del esfuerzo cortante.* Por tanto, en el caso de esfuerzo cortante esviado en

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

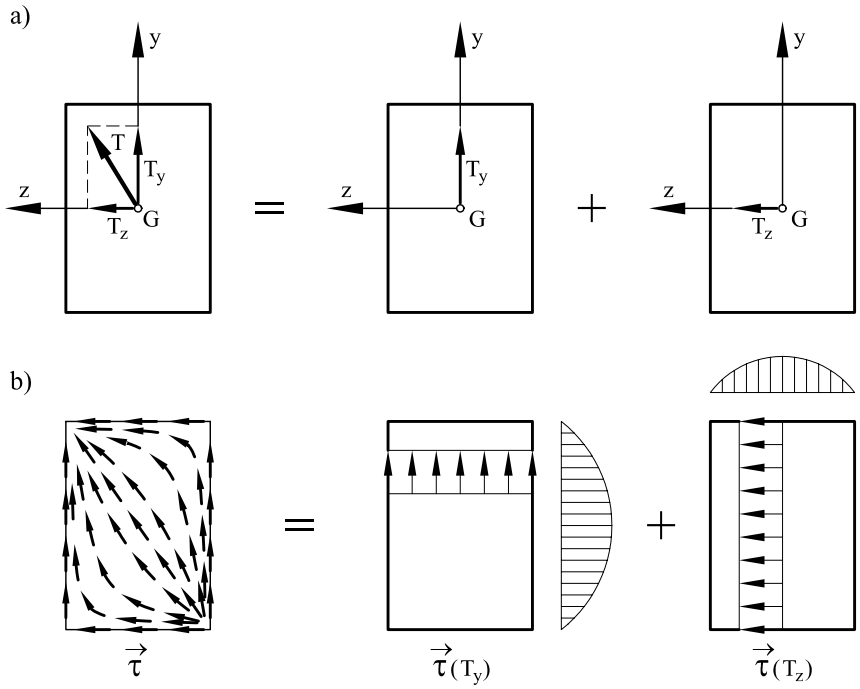

Fig. 6.33: Cortante esviado actuando sobre una sección rectangular

secciones de pequeño espesor, se puede hallar el módulo de la tensión tangencial en un punto por superposición *escalar* de efectos, ya que la dirección de τ en el punto es la misma para ambas componentes del esfuerzo cortante. Así, se puede escribir:

$$\tau = \pm\, \tau(T_y) \pm \tau(T_z) \tag{6.70}$$

Los signos ($\pm$) de la expresión anterior indican que los sentidos de las respectivas contribuciones deben ser tenidos en cuenta a la hora de sumar los efectos de las dos componentes del esfuerzo y la suma a realizar es algebraica.

Así, por ejemplo, en la Figura 6.34a se muestra la descomposición de un esfuerzo cortante esviado que actúa sobre una sección en doble T en sus respectivas componentes según los ejes principales de inercia, T_y y T_z, respectivamente. En la Figura 6.34b se muestran las distribuciones de tensiones que pueden calcularse para cada una de las componentes utilizando la fórmula de Collignon, así como el resultado de sumarlas algebraicamente. En este caso, las tensiones finales sobre el alma son las debidas exclusivamente a la componente T_y del esfuerzo, ya que la componente T_z no produce tensiones apreciables sobre ésta. Sin embargo, las tensiones totales sobre las alas proviene de sumar adecuadamente las producidas por cada una de las componentes.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

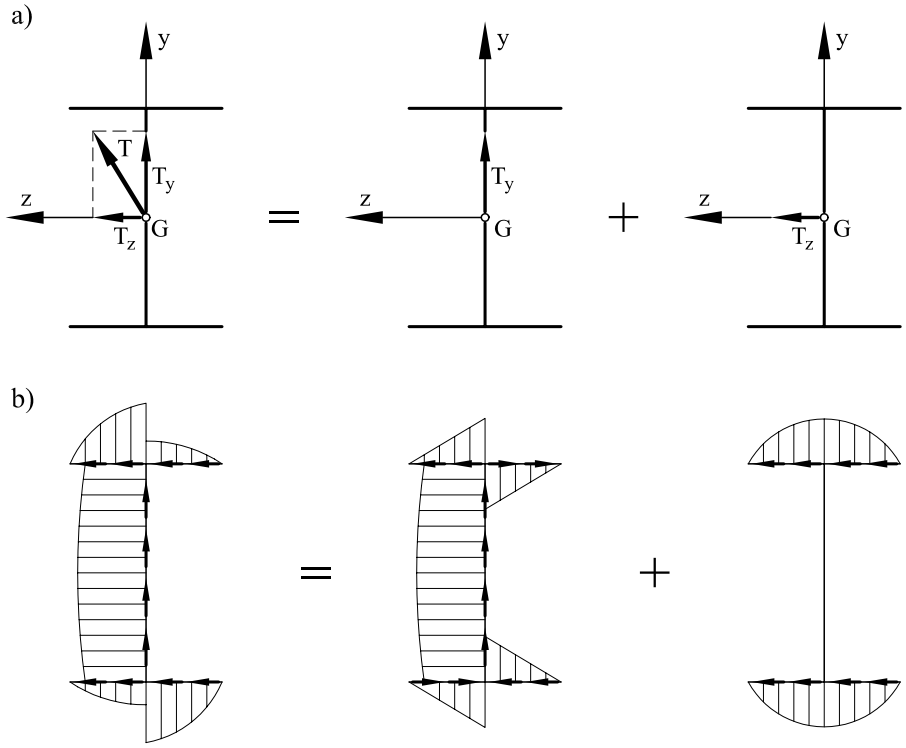

Fig. 6.34: Cortante esviado actuando sobre una sección en doble T

6.7.2 Estudio directo

Alternativamente, puede plantearse el estudio directo del cortante esviado, como consecuencia del estudio directo de la flexión esviada. En efecto, consideremos una pieza prismática de sección arbitraria pero constante a lo largo de la pieza, sometida a flexión simple esviada (ver Figura 6.35). Del equilibrio de momentos de una rebanada limitada por dos secciones S y S', separadas por una distancia dx, se obtienen las relaciones diferenciales:

$$T_{tt'} = -\frac{dM_{nn'}}{dx} \qquad ; \qquad T_{nn'} = \frac{dM_{tt'}}{dx} \tag{6.71}$$

donde $M_{nn'}$ y $M_{tt'}$ son las componentes del momento flector respecto al eje neutro nn' y a un eje perpendicular a éste, tt'. Análogamente se definen las componentes $T_{nn'}$ y $T_{tt'}$. Supondremos, por simplicidad, que el plano de solicitación es el mismo en las secciones S y S'. Por tanto, el eje neutro tiene la misma dirección en ambas secciones.

Consideremos ahora la rebanada dividida por una superficie plana que tenga por traza sobre el plano de la sección a la recta AB y paralela al eje de la viga (ver Figura

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

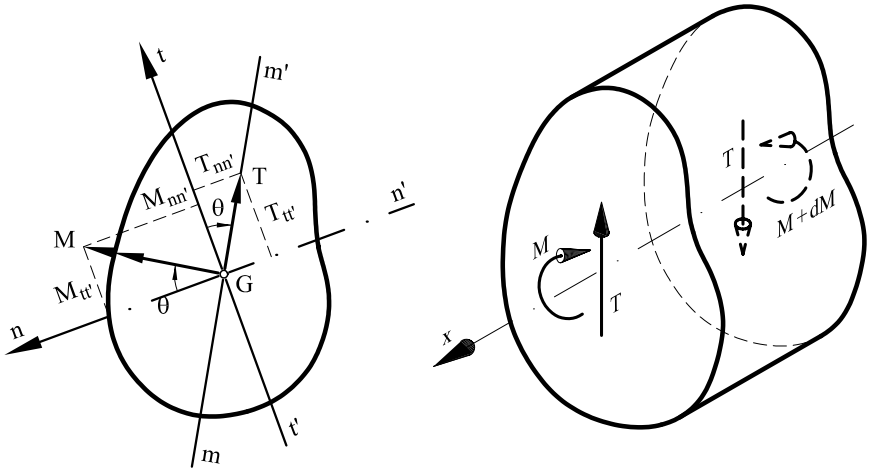

Fig. 6.35: Estudio directo del cortante esviado

6.36). Estudiemos el equilibrio de fuerzas según el eje x que actúan sobre la parte rayada (1) que queda por encima de dicha superficie. Sobre la cara S' actúan unas tensiones normales debidas a $M_{nn'}$ cuya resultante F sobre la parte de la sección (1), limitada por la línea AB vale:

$$F = \int_\Omega \sigma_x \, d\Omega = \int_\Omega -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \, \xi \, d\Omega = -\frac{M_{nn'}}{I_{nn'}} \, m^e_{nn'}(\Omega) \tag{6.72}$$

donde Ω es la parte de la sección sobre la que se evalúa dicha resultante, ξ es la distancia al eje neutro, $I_{nn'}$ es el momento de inercia de la sección respecto a dicho eje y $m^e_{nn'}(\Omega) = \int_\Omega \xi \, d\Omega$ es el momento estático de Ω (área rayada) respecto al eje neutro. De nuevo se ha utilizado la hipótesis de distribución lineal de tensiones para el caso de flexión esviada.

De igual forma, sobre la superficie Ω de la cara S se tiene una resultante de tensiones normales, $F + dF$, de valor:

$$F + dF = \int_\Omega -\frac{M_{nn'} + dM_{nn'}}{I_{nn'}} \, \xi \, d\Omega = -\frac{M_{nn'} + dM_{nn'}}{I_{nn'}} \, m^e_{nn'}(\Omega) \tag{6.73}$$

La diferencia entre ambas fuerzas normales es:

$$dF = -\frac{dM_{nn'}}{I_{nn'}} \, m^e_{nn'}(\Omega) = \frac{T_{tt'} dx}{I_{nn'}} \, m^e_{nn'}(\Omega) \tag{6.74}$$

donde se ha tenido en cuenta que $dM_{nn'} = -T_{tt'} \, dx$.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

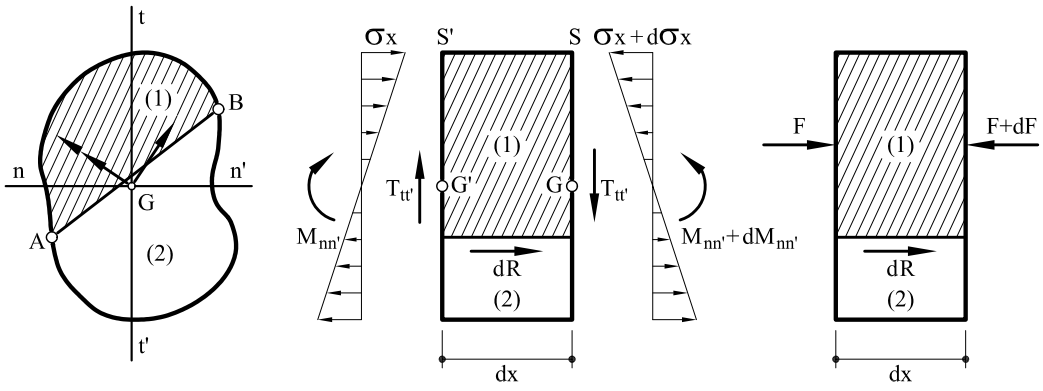

Fig. 6.36: Deducción de la fórmula de Collignon (estudio directo)

A partir de aquí, y por análogo procedimiento al empleado en la Sección 6.3 se obtiene la fórmula de Collignon, referida a los ejes nn' y tt', como:

$$\tau_{\text{med}} = \frac{T_{tt'}\; m^e_{nn'}(\Omega)}{I_{nn'}\; l_{AB}} \tag{6.75}$$

donde l_{AB} es la longitud del segmento $\overline{AB}$. Recordemos que esta fórmula permite hallar la tensión tangencial *media* a lo largo de la línea AB en la dirección normal a esta línea, así como determinar su sentido sin ambigüedad.

Ejercicio 6.7.2.1

Demostrar que las resultantes de las tensiones tangenciales obtenidas en el estudio directo del cortante esviado en las direcciones normal y tangente al eje neutro son $T_{tt'}$ y $T_{nn'}$, respectivamente.

Obtenemos primero la distribución de las tensiones τ_{xt}, perpendiculares a la dirección del eje neutro, cortando la sección por planos paralelos a dicho eje:

$$\tau_{xt} = \frac{T_{tt'}\; m^e_{nn'}\,(\xi)}{I_{nn'}\; l\,(\xi)}$$

Calculamos la resultante de dichas componentes:

$$\int_S \tau_{xt}\, dS \;\; = \;\; \int_{-v'_t}^{+v_t} \frac{T_{tt'}\; m^e_{nn'}\,(\xi)}{I_{nn'}\; l\,(\xi)}\, l\,(\xi)\; d\xi$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{T_{tt'}}{I_{nn'}} \int_{-v'_t}^{+v_t} m^e_{nn'}(\xi)\ d\xi \\
&= \frac{T_{tt'}}{I_{nn'}}\, I_{nn'} \\
&= T_{tt'} \qquad \text{(q.e.d)}
\end{aligned}
$$

La demostración de que $I_{nn'} = \int_{-v'_t tt'}^{+v_t} m^e_{nn'}(\xi)\ d\xi$ es análoga a la realizada en el Ejercicio 6.3.1. (ver también Figura 6.37a).

Análogamente, calculamos la distribución de las componentes τ_{xn}, paralelas a la dirección del eje neutro, cortando la sección por planos perpendiculares a dicho eje:

$$\tau_{xn} = \frac{T_{tt'}\ m^e_{nn'}(\eta)}{I_{nn'}\ l(\eta)}$$

y cuyo sentido viene determinado por consideraciones de equilibrio. Calculamos la resultante de dichas tensiones

$$
\begin{aligned}
\int_S \tau_{xn}\, dS &= \int_{-w'_n}^{+w_n} \frac{T_{tt'}\ m^e_{nn'}(\eta)}{I_{nn'}\ l(\eta)}\, l(\eta)\ d\eta \\
&= \frac{T_{tt'}}{I_{nn'}} \int_{-w'_n}^{+w_n} m^e_{nn'}(\eta)\ d\eta \\
&= \frac{T_{tt'}}{I_{nn'}} I_{nt}
\end{aligned}
$$

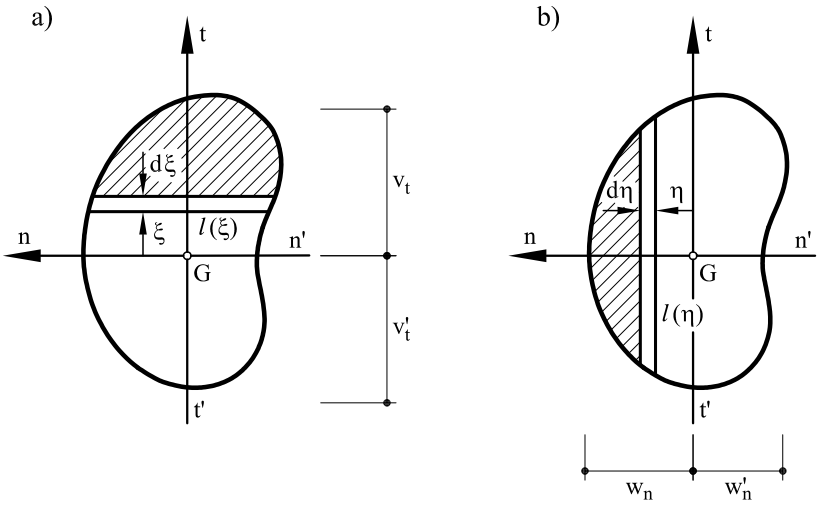

Fig. 6.37: Diferenciales de área y momentos estáticos

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

La demostración de que $I_{nt} = \int_{-w'_n}^{+w_n} m^e_{nn'}(\eta)\, d\eta$ es análoga a la realizada en el Ejercicio 6.3.1. (ver también Figura 6.37b).

Por otra parte, en el Ejercicio 4.3.1.2 de la Sección 4.3, estudio directo de la flexión esviada, se demostró que:

$$\tan\theta = \frac{M_{tt'}}{M_{nn'}} = \frac{I_{nt}}{I_{nn'}}$$

donde θ es el ángulo de esviaje que forma el vector momento con el eje neutro, (ver Figura 6.35a). Dado que, sin pérdida de generalidad, se puede considerar que el cortante está contenido en el plano de carga, se tiene que forma un ángulo θ con el eje normal al eje neutro (ver Figura 6.35a). Por tanto:

$$\tan\theta = -\frac{T_{nn'}}{T_{tt'}} = \frac{I_{nt}}{I_{nn'}}$$

y entonces, teniendo en cuenta la necesaria coincidencia de sentidos,

$$\int_S \tau_{xn}\, dS = \frac{T_{tt'}}{I_{nn'}}\, |I_{nt}| = T_{nn'} \qquad \text{(q.e.d)}$$

6.8 Centro de esfuerzos cortantes

De forma implícita, se ha supuesto anteriormente que la línea de acción del esfuerzo cortante pasa por el centro de gravedad de la sección. De hecho, la *posición* de dicho esfuerzo sobre el plano de la sección no ha desempeñado ningún papel en las consideraciones de equilibrio utilizadas para obtener la fórmula de Collignon y, por lo tanto, la distribución correspondiente de tensiones tangenciales (valores medios y sentidos) debidas a la flexión simple. Sin embargo, es necesario plantearse, *a posteriori*, si la resultante de dicha distribución pasa siempre por el centro de gravedad de la sección. Veremos a continuación que, en general, esto no así y, por tanto, es necesario introducir el concepto de *centro de esfuerzos cortantes de la sección*, como punto de aplicación de la resultante de las tensiones tangenciales provenientes de la flexión simple.

Consideremos un voladizo con sección en U, simétrica respecto al eje z (principal de inercia), sometido a un esfuerzo cortante constante a lo largo de la pieza, de valor T_y, vertical ascendente, cuya línea de acción pasa por un punto C situado a una distancia d del punto O, centro de gravedad del alma. Sea h la altura del perfil y b la anchura de las alas, e' el espesor de las alas y e el espesor del alma (ver Figuras 6.38a y b).

La distribución de tensiones tangenciales que produce un cortante vertical sobre un perfil de este tipo se estudió detalladamante en la Sección 6.5.3, y se muestra en la Figura 6.38c. Consiste en una distribución lineal de tensiones horizontales sobre las alas y una distribución parabólica de tensiones verticales sobre el alma. Llamaremos R

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

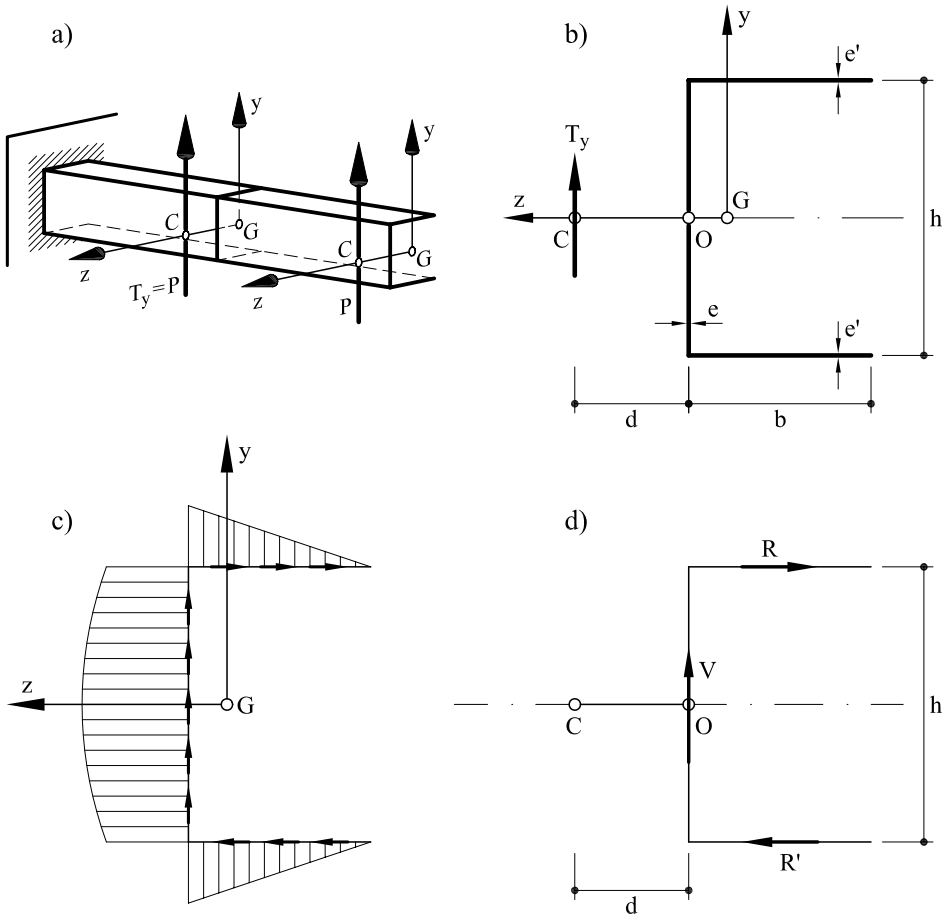

Fig. 6.38: Centro de esfuerzos cortantes de una sección en U

y R' a las resultantes de las tensiones sobre el ala superior e inferior, respectivamente, y V a la resultante de las tensiones sobre el alma. Para que se cumplan las ecuaciones de equilibrio interno, el sistema formado por las fuerzas R, R' y V (ver Figura 6.38d) debe ser estáticamente equivalente del formado por el esfuerzo cortante actuando sobre el punto C, que se muestra en la Figura 6.38b. Para ello, debe cumplirse que:

(a) Las resultantes R y R' de las tensiones tangenciales en las alas deben ser iguales y de sentidos opuestos, ya que $T_z = 0$. Su valor puede calcularse como:

$$R = R' = \frac{1}{2}\frac{T_y(be'\frac{h}{2})}{I_z\, e'}be' = \frac{T_y\, b^2 he'}{4I_z} \tag{6.76}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

(b) La resultante V de las tensiones tangenciales sobre el alma es igual al cortante T_y, $V = T_y$, según se comprobó en la Sección 6.5.1.

(c) Además, por ser los esfuerzos sobre la sección iguales a las fuerzas y los momentos resultantes de las tensiones, el momento de las tensiones respecto a cualquier punto debe ser igual al producido por el esfuerzo cortante T_y. Tomando momentos respecto al punto O, debe ser:

$$T_y\, d = R\,\frac{h}{2} + R'\,\frac{h}{2} = R\, h \tag{6.77}$$

de donde:

$$d = \frac{Rh}{T_y} = \frac{b^2 h^2 e'}{4 I_z} \tag{6.78}$$

En conclusión, el sistema de tensiones tangenciales calculado es estáticamente equivalente al esfuerzo cortante T_y que actúa sobre la sección *solamente si éste pasa por el punto C*. Se observa además que la posición del punto C sólo depende de la geometría de la sección, y no del valor del cortante actuante T_y. Es, por tanto, una característica geométrica de la sección.

Como proposición general podemos enunciar que *existe siempre un punto en el plano de la sección por el que pasa la resultante de las tensiones tangenciales debidas a la flexión simple (es decir, del esfuerzo cortante).* Dicho punto es característico de la geometría de la sección y se conoce con el nombre de *centro de esfuerzos cortantes de la sección.* El concepto de centro de esfuerzos cortantes y el método para calcularlo se deben a R. Maillart (1922).

La introducción del concepto de centro de esfuerzos cortantes obliga a reconsiderar la definición del momento torsor reducido al centro de gravedad de la sección, tal como se introdujo en el Capítulo 2. Consideremos una sección solicitada por un sistema de esfuerzos que consiste en un momento flector $\vec{M}$, un esfuerzo cortante $\vec{T}$ y un momento torsor $\vec{M}_t$, reducidos al centro de gravedad de la sección, tal como se muestra en la Figura 6.39. El sistema de fuerzas formado por $\vec{T}$ y $\vec{M}_t$, reducidos al centro de gravedad G (Figura 6.39a), es estáticamente equivalente al sistema formado por $\vec{T}$ y $\vec{M}_t^*$, reducidos al centro de esfuerzos cortantes C (Figura 6.39b), con:

$$\overrightarrow{M}_t^* = \overrightarrow{M}_t + \overrightarrow{CG} \times \overrightarrow{T} \tag{6.79}$$

Consideremos el significado físico del momento $\vec{M}_t^*$. Para ello, consideremos que sobre la sección actúa una distribución de tensiones tangenciales tal que la tensión en

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

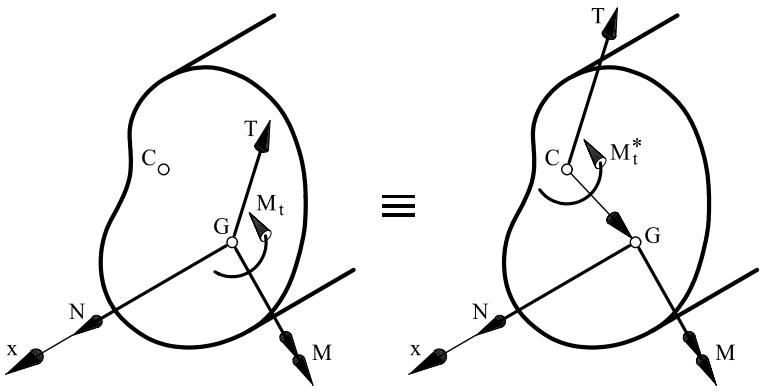

Fig. 6.39: Reducción de esfuerzos al centro de esfuerzos cortantes

un punto genérico de ésta sea $\vec{\tau}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\| \overrightarrow{M}_t^* \| &= \| \overrightarrow{M}_t \| + \| \overrightarrow{CG} \times \overrightarrow{T} \| && \text{(6.80a)} \\
&= \| \overrightarrow{M}_t + \overrightarrow{CG} \times \overrightarrow{T} \| && \text{(6.80b)} \\
&= \| \int_S \vec{r} \times \vec{\tau} \; dS + \overrightarrow{CG} \times \int_S \vec{\tau} \; dS \| && \text{(6.80c)} \\
&= \| \int_S \left(\vec{r} + \overrightarrow{CG} \right) \times \vec{\tau} \; dS \| && \text{(6.80d)} \\
&= \| \int_S \vec{r}_c \times \vec{\tau} \; dS \| && \text{(6.80e)}
\end{aligned}$$

donde $\vec{r} = \vec{r}(y, z)$ es el vector de posición de un punto genérico de la sección respecto a G, y $\vec{r}_c = \vec{r}_c(y - y_c, z - z_c)$ es el correspondiente vector de posición respecto al centro C, de coordenadas $C(y_c, z_c)$ (ver Figura 6.40). Se comprueba, por tanto, que M_t^* es el momento resultante de las tensiones tangenciales totales respecto al centro de cortantes. En consecuencia, la existencia o no del fenómeno de torsión, tal como se estudiará en el Capítulo próximo, y de tensiones tangenciales asociadas a ésta, depende del valor del momento M_t^*, reducido al centro de esfuerzos cortantes, y no del valor de M_t, reducido al centro de gravedad. Es por esta razón que M_t^* recibe el nombre de *momento torsor real,* y al centro de esfuerzos cortantes se le llama también *centro de torsión.*

Entonces, hecha la reducción del momento torsor al centro de esfuerzos cortantes, pueden resultar tres casos:

(a) $T = 0$ y $M_t^* \neq 0$. La sección está solicitada únicamente a *torsión* o a *torsión y flexión pura* (el cortante es nulo) y las tensiones tangenciales son las debidas únicamente al momento torsor.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

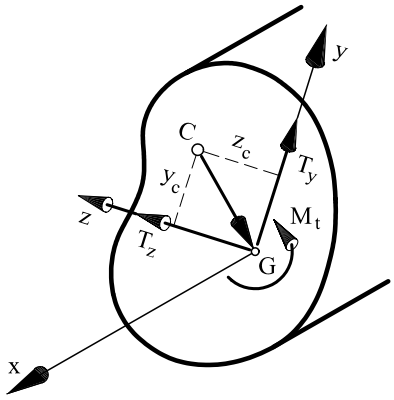

Fig. 6.40: Coordenadas del centro de esfuerzos cortantes

(b) $T \neq 0$ y $M_t^* = 0$. La sección está solicitada únicamente a *flexión simple* y las tensiones tangenciales son las debidas únicamente a T pasando por el punto C.

(c) $T \neq 0$ y $M_t^* \neq 0$. La sección está solicitada a *flexo-torsión* y las tensiones tangenciales totales serán las debidas a flexión (estáticamente equivalentes al esfuerzo cortante T pasando por el punto C) y a torsión (equivalentes al momento torsor M_t^*).

En conclusión, es necesario conocer la posición del centro de esfuerzos cortantes para poder definir el momento torsor real actuante sobre la sección. En particular, es necesario saber en qué secciones éste no coincide con el centro de gravedad, ya que éstas pueden estar sometidas de forma inadvertida a flexo-torsión.

Como ejemplo, veamos qué le ocurre al voladizo de sección en U con el que hemos empezado la discusión, según por donde pase la línea de acción de la carga en su extremo (y, por tanto, del esfuerzo cortante). En la Figura 6.41a el cortante pasa por el centro de esfuerzos cortantes C y, en ausencia de un momento torsor $M_t^* = M_t = 0$, la sección está sometida unicamente a *flexión*[1]. En la Figura 6.41b el cortante no pasa por C y, por lo tanto, la sección está sometida a *flexo-torsión*, con un momento torsor real $M_t^* = T\,d$, antihorario, que provoca un giro de torsión del sentido indicado en la figura. En la Figura 6.41c ocurre lo mismo, pero con un momento torsor de sentido horario, opuesto al de la figura anterior. Este sería el caso, por ejemplo, debido a las cargas de peso propio, ya que entonces la línea de acción de T pasaría por el centro de gravedad de la sección. Por tanto, una pieza de sección en U, trabajando bajo la acción de su propio peso según su plano principal de inercia mayor, está sometida a torsión.

[1] Por esta razón el centro de esfuerzos cortantes recibe también el nombre de *centro de flexión*.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

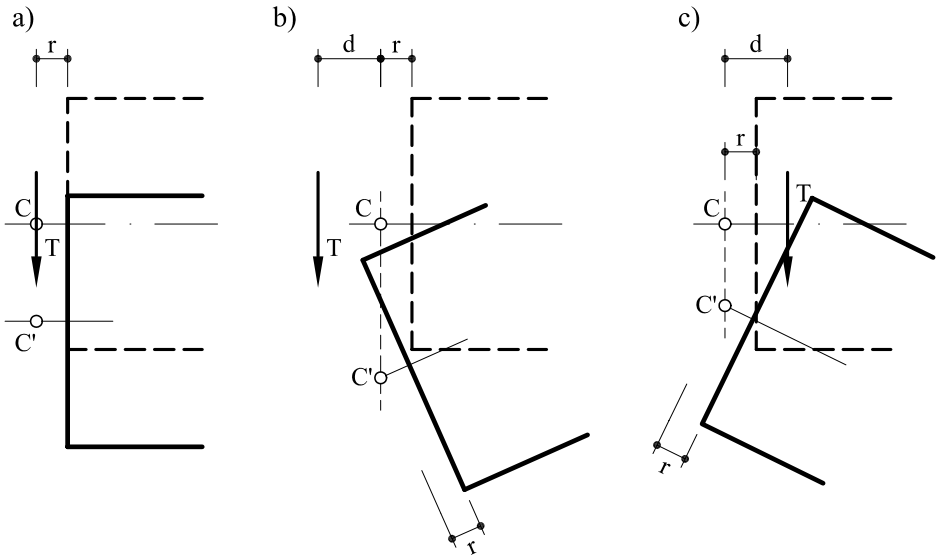

Fig. 6.41: Voladizo con sección en U sometido a esfuerzo cortante según diversas líneas de acción

6.8.1 Posición del centro de esfuerzos cortantes

La posición del centro de esfuerzos cortantes C se determina directamente a partir de su definición, es decir, su posición es tal que un esfuerzo cortante de dirección cualquiera, supuesto aplicado en C es estáticamente equivalente al sistema de fuerzas resultante de las tensiones tangenciales debidas a dicho esfuerzo cortante. En particular, el momento de un esfuerzo cortante de dirección cualquiera, supuesto aplicado en C, respecto a un punto arbitrario O de la sección debe ser igual al momento resultante de las tensiones tangenciales debidas a dicho esfuerzo cortante, respecto al punto O (ver Figura 6.42). Es decir:

$$\overrightarrow{OC} \times \vec{T} = \int_S \vec{r}_o \times \vec{\tau}\ dS \tag{6.81}$$

En general, ésta es una ecuación con dos incógnitas: las dos coordenadas del punto C en el plano de la sección. Por tanto, para resolverla hay que plantearla dos veces, para cortantes $\overrightarrow{T}$ actuando según dos direcciones distintas. Es habitual plantearla para cortantes actuando según los dos ejes principales de inercia de la sección, ya que esto reduce los dos casos a estudiar a sendos problemas de cortante recto (no esviado).

Cuando la sección tiene un eje de simetría, el centro de cortantes está en dicho eje, por simetría, con lo que se reduce a una la coordenada incógnita del centro de cortantes.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

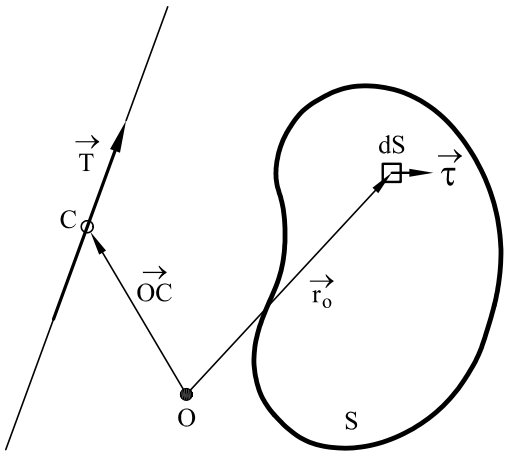

Fig. 6.42: Determinación de la posición del centro de esfuerzos cortantes

Tal es el caso, por ejemplo, de la sección en U estudiada anteriormente, donde la posición del centro de esfuerzos cortantes se ha calculado planteando exactamente la igualdad de momentos de la ecuación (6.81).

Si la sección tiene dos o más ejes de simetría, el centro de esfuerzos cortantes está necesariamente en la intersección de dichos ejes y coincide con el centro de gravedad. Tal es el caso, por ejemplo, de las secciones rectangulares o circulares, así como el de las secciones simétricas en doble T.

En las secciones abiertas de pequeño espesor formadas por tramos rectos que concurren en un punto, tales como las que se muestran en la Figura 6.43, dicho punto es necesariamente el centro de esfuerzos cortantes, al ser nula la suma de momentos, respecto de dicho punto, de las tensiones tangenciales que un esfuerzo cortante arbitrario produce sobre la sección.

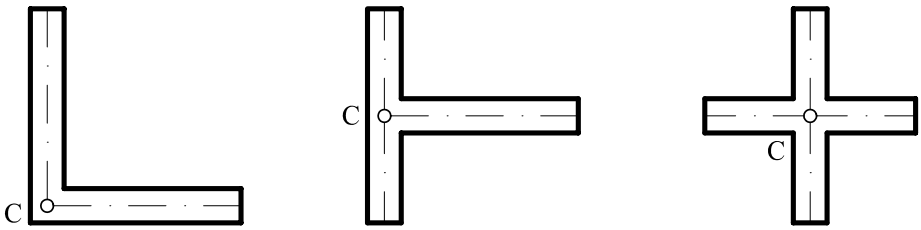

Fig. 6.43: Posición del centro de esfuerzos cortantes en algunas secciones particulares

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

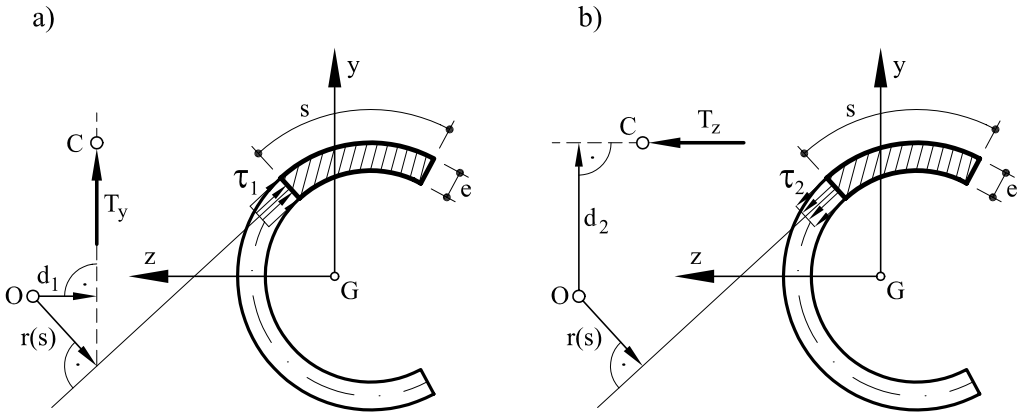

Fig. 6.44: Determinación de la posición del centro de esfuerzos cortantes en una sección abierta

Veamos cómo se aplica el procedimiento general al caso particular de las secciones abiertas de pequeño espesor, que tiene un interés especial. Para ello, plantearemos la ecuación de igualdad de momentos (6.81) para dos cortantes distintos actuando en el centro de esfuerzos cortantes C, según las direcciones principales de inercia. Así, se considera en primer lugar, un esfuerzo cortante T_y, paralelo al eje principal de inercia y, pasando por el centro de esfuerzos cortantes C, de *posición supuesta conocida* y se calcula la correspondiente distribución de tensiones tangenciales a lo largo de la línea media de la sección $\tau_1 = \tau_1(s)$, tal como se muestra en la Figura 6.44a, aplicando la fórmula de Collignon adecuadamente:

$$\tau_1(s) = \frac{T_y\, m_z^e(s)}{I_z\, e(s)} \tag{6.82}$$

Se iguala el momento, respecto a un punto cualquiera O, del esfuerzo cortante T_y al de las tensiones tangenciales τ_1 producidas por éste:

$$d_1\, T_y = \int_s (r\, \tau_1)\, e\, ds = \int_s r\, \frac{T_y\, m_z^e}{I_z\, e}\, e\, ds \tag{6.83}$$

donde $r = r(s)$ es la distancia de la tangente a la línea media de la sección al punto O. De ahí se deduce la distancia d_1 del centro C al punto O, con su signo, en la dirección del eje z (esto es, perpendicular al T_y actuante):

$$d_1 = \frac{1}{I_z} \int_s m_z^e(s)\; r(s)\, ds \tag{6.84}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Se repite el proceso para un esfuerzo cortante T_z, paralelo al eje principal de inercia z, pasando por el centro de esfuerzos cortantes C supuesto, y se calcula la correspondiente distribución de tensiones tangenciales a lo largo de la línea media de la sección $\tau_2 = \tau_2(s)$, tal como se muestra en la Figura 6.44b, aplicando la fórmula de Collignon adecuadamente:

$$\tau_2(s) = \frac{T_z\, m_y^e(s)}{I_y\, e(s)} \tag{6.85}$$

Se tiene ahora la igualdad:

$$d_2\, T_z = \int_s (r\, \tau_2)\, e\, ds = \int_s r\, \frac{T_z\, m_y^e}{I_y\, e}\, e\, ds \tag{6.86}$$

De ahí se deduce la distancia d_2 del centro C al punto O, con su signo, en la dirección del eje y (esto es, perpendicular al T_z actuante):

$$d_2 = \frac{1}{I_y} \int_s m_y^e(s)\ r(s)\, ds \tag{6.87}$$

La intersección de ambas líneas de acción, a distancias d_1 y d_2 del punto O, determina el centro de esfuerzos cortantes. Se observa que la posición de dicho centro es independiente de los valores de T_y y T_z.

Si las secciones son de forma arbitraria, se procede como para las secciones de pequeño espesor, pero determinando las correspondientes distribuciones de tensiones tangenciales de forma adecuada a cada caso, lo cual puede ser complejo en muchos casos. Afortunadamente, en secciones macizas, secciones de espesor considerable y secciones cerradas el centro de esfuerzos cortantes está situado en las cercanías del centro de gravedad. Además, su inercia a torsión es elevada, con lo cual la incertidumbre sobre la localización exacta del centro de esfuerzos cortantes tiene pocas consecuencias prácticas.

Ejercicio 6.8.2.1

Se dimensiona el voladizo de la Figura 6.45 para una carga vertical descendente uniformemente repartida de valor $p = 5$ kN/m, atendiendo exclusivamente a que las tensiones normales no excedan el valor de la tensión admisible, $\sigma^* = 250\,\text{MPa}$. Se pide: (a) Calcular la distribución de tensiones normales y comprobar que no se excede el valor admisible. (b) Dibujar la distribución de tensiones tangenciales debidas al cortante y calcular el valor máximo en la pieza. (c) Calcular y dibujar la posición del centro de esfuerzos cortantes.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

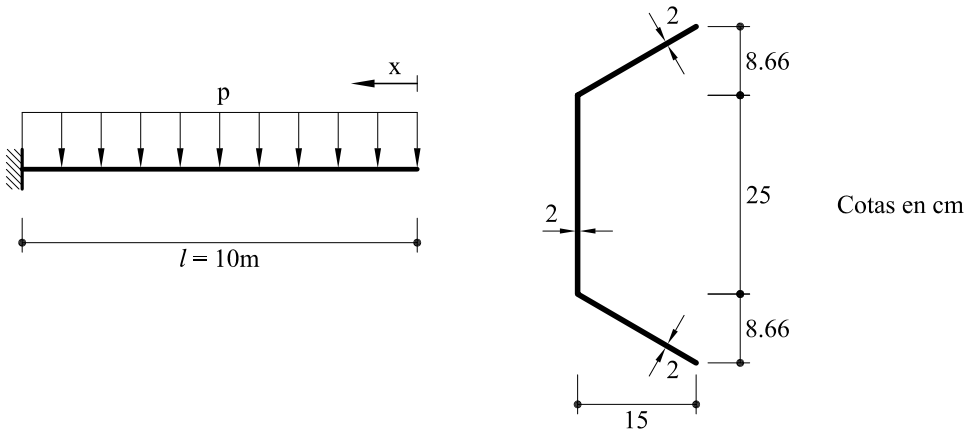

Fig. 6.45: Voladizo del Ejemplo 6.8.2.1

Las características geométricas de la sección son las siguientes:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot (25 + 2 \cdot 17,32) \;=\; 119,28 \;\text{cm}^2 \\ z'_G &= \frac{25 \cdot 0 + 2 \cdot (2 \cdot 17,32) \cdot (-7,5)}{119,28} \;=\; -4,356\,\text{cm} \\ I_z &= \frac{25^3 \cdot 2}{12} + 2 \cdot \left[\frac{1}{12}(8,66)^3 \cdot 4 + (17,32 \cdot 2) \cdot \left(12,5 + \frac{8,66}{2}\right)^2 \right] \\ &= 22.669\,\text{cm}^4 \end{aligned}$$

(a) Las leyes de momentos flectores y esfuerzos cortantes debidas a la carga p son:

$$M(x) = \frac{1}{2} p x^2 \qquad ; \qquad T(x) \;=\; px$$

con valores máximos en la sección del empotramiento ($x = 10$ m) de valor:

$$\begin{aligned} M_{\max} &= 5 \cdot \frac{10^2}{2} \;=\; 250\,\text{kN} \cdot \text{m} \\ T_{\max} &= 5 \cdot 10 \;=\; 50\,\text{kN} \end{aligned}$$

Las tensiones normales máximas en la sección de empotramiento pueden calcularse mediante la fórmula siguiente:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z\, v}{I_z} = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot (12,5 + 8,66) \cdot 10^{-2}}{22.669 \cdot 10^{-8}}\;\text{Pa} \;= 233,4\,\text{MPa} \quad < \sigma^*$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

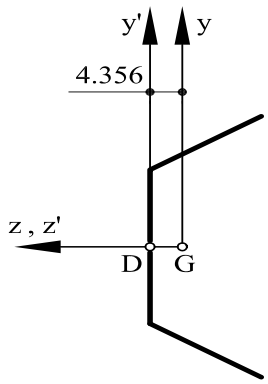

Fig. 6.46: Posición del centro de gravedad

(b) La distribución de tensiones tangenciales puede obtenerse aplicando la fórmula de Collignon:

$$\tau(s) = \frac{T_y \, m_z^e(s)}{I_z \, e}$$

En el ala superior, el valor del momento estático m_z^e, en función de la coordenada s, es igual a:

$$\begin{aligned} m_z^e(s) &= e\, s\, (12,5 + 8,667 - \frac{s}{2} \sin 30^\circ) \\ &= 42,33\, s - 0,5\, s^2 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Por tanto, en el punto A la tensión tangencial es nula, $\tau_A = 0$. En el punto B ($s = 17,32\,\text{cm}$) el valor del momento estático es igual a $m_z^e = 583,2\,\text{cm}^3$ y, por consiguiente, la tensión tangencial en dicho punto es:

$$\tau_B = \frac{T_y \cdot 10^3 \cdot 583,2 \cdot 10^{-6}}{22.669 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \text{ Pa } = 0,1286 \cdot 10^{-3}\, T_y \text{ MPa}$$

con T_y en Newtons. Reemplazando en la expresión anterior el valor del esfuerzo cortante T_y por $T_{\max} = 50 \cdot 10^3$ N se obtiene $\tau_B = 6,431\,\text{MPa}$. Por simetría de la sección y antisimetría de la solicitación, las tensiones en el ala inferior son $\tau_A = \tau_{A'} = 0$ y $\tau_B = \tau_{B'} = 6,431\,\text{MPa}$. Los sentidos de las tensiones en las alas son los de la Figura 6.47b, tal y como puede deducirse por sencillas consideraciones de equilibrio.

En el alma, el momento estático respecto al eje z puede calcularse en función de la coordenada y del corte:

$$m_z^e(y) = 583,2 + (12,5 - y)\, e \frac{1}{2}\, (12,5 + y) = 739,45 - y^2 \text{ cm}^3$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

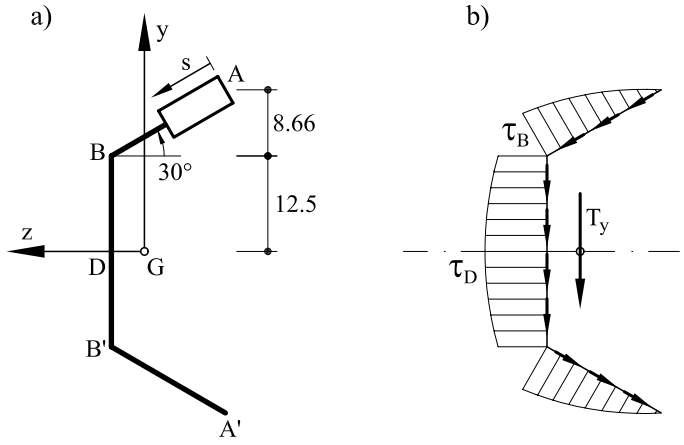

Fig. 6.47: Distribución de tensiones tangenciales de cortante

y el valor máximo del mismo, para el punto D ($y = 0\,\text{cm}$), es $m_z^e(y=0) = 739,5\,\text{cm}^3$; la tensión tangencial en dicho punto es:

$$\tau_D = \frac{T_y{\cdot}10^3 \cdot 739,45{\cdot}10^{-6}}{22.669 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}\ \text{Pa}\ = 0,1631 \cdot 10^{-3}\, T_y\ \text{MPa}$$

que para el esfuerzo cortante $T_{\max} = 50 \cdot 10^3$ N resulta igual a $\tau_D = 8,155$ MPa.

Observar lo reducido del valor de las tensiones tangenciales debidas al cortante frente a las tensiones normales debidas al momento flector.

(d) Al ser la sección simétrica respecto al eje z, el centro de esfuerzos cortantes C estará necesariamente situado sobre dicho eje, y hay que calcular su posición sobre éste. Para ello supongamos ésta conocida y apliquemos sobre la sección un cortante vertical que pase por el centro de esfuerzos cortantes, tal como se muestra en la Figura 6.48a. La correspondiente distribución de tensiones tangenciales es conocida, ya que coincide con la calculada en el apartado anterior de este ejemplo. Calculemos el valor de las resultantes de las tensiones tangenciales en las alas R y R' y en el alma V (Figura 6.47b). En este caso, estos valores se pueden obtener utilizando las expresiones calculadas en el apartado anterior:

$$\begin{aligned} R &= \int_{s=0}^{s=17,32} \frac{T_y m_z^e(s)}{I_z\, e}\, e\, ds \\ &= \frac{T_y}{I_z} \int_0^{17,32} (42,32\, s - 0,5\, s^2)\, ds \\ &= 0,2419\, T_y \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

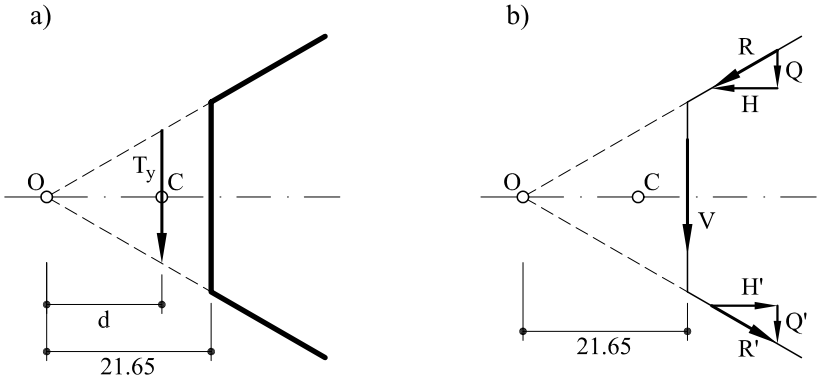

Fig. 6.48: Determinación de la posición del centro de esfuerzos cortantes

$$\begin{aligned} Q &= R\sin 30^\circ = 0,1210\ T_y \\ V &= 25 \cdot 2 \cdot \left[0,1286 + \frac{2}{3}(0,1631 - 0,1286)\right] \cdot 10^{-3}\ T_y \\ &= 0,7580\ T_y \end{aligned}$$

Nótese que $V + 2Q = T_y$. Igualando momentos respecto al punto O de los sistemas de fuerzas formadas por T_y, por un lado, y las resultantes R, R' y V, por otro, se obtiene:

$$T_y\ d = V \cdot 21,65 \qquad \Rightarrow \qquad d = 21,65\ \frac{V}{T_y} = 16,41\,\text{cm}$$

que proporciona la posición del centro de esfuerzos cortantes C sobre el eje de simetría de la sección.

Ejercicio 6.8.2.2

Calcular la posición del centro de esfuerzos cortantes de la sección rectangular cerrada de la Figura 6.49 (ver también Ejercicio 6.5.2.1).

Por simetría de la sección respecto al eje z, el centro de esfuerzos cortantes C está necesariamente situado sobre dicho eje. Para calcular su posición sobre éste, supongamos ésta conocida y apliquemos sobre la sección un cortante vertical que pase por el centro de esfuerzos cortantes, tal como se muestra en la Figura 6.50a. La distribución de tensiones tangenciales debidas a la flexión puede calcularse de forma análoga a como

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

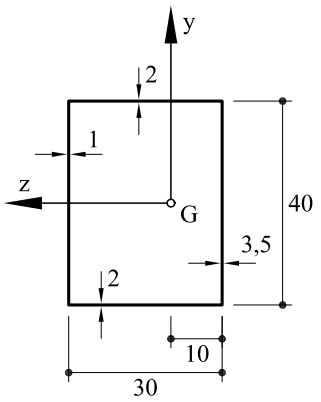

Fig. 6.49: Sección rectangular hueca asimétrica

se hizo en el Ejercicio 6.5.2.1, y resulta ser la dibujada en la Figura 6.50b, con:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0,5629\,T_y \text{ MPa} \quad ; \quad \tau_1 = 0,2705\,T_y \text{ MPa} \\ \tau_2 &= 0,8187\,T_y \text{ MPa} \quad ; \quad \tau_3 = 0,5994\,T_y \text{ MPa} \end{aligned}$$

con T_y en Newtons. Calculemos el valor de las resultantes de las tensiones tangenciales en las alas R_1 y R_2 y en las almas V_1 y V_2 (Figura 6.50c):

$$\begin{aligned} R_1 &= \left[\frac{1}{2}\cdot\tau_1\cdot 9,735\cdot 2\right]\cdot 10^{-2} = 0,02633\,T_y \\ R_2 &= \left[\frac{1}{2}\cdot\tau_0\cdot 20,265\cdot 2\right]\cdot 10^{-2} = 0,1141\,T_y \\ V_1 &= \left[\left(2\tau_1+\frac{2}{3}\left(\tau_2-2\tau_1\right)\right)\cdot 40\cdot 1\right]\cdot 10^{-2} = 0,2904\,T_y \\ V_2 &= \left[\left(\frac{4}{7}\tau_0+\frac{2}{3}\left(\tau_3-\frac{4}{7}\tau_0\right)\right)\cdot 40\cdot 3,5\right]\cdot 10^{-2} = 0,7096\,T_y \end{aligned}$$

Igualando momentos respecto al punto O de los sistemas de fuerzas formadas por T_y (ver Figura 6.50a), por un lado, y las resultantes R_1, R_2, V_1 y V_2 (ver Figura 6.50c), por otro, se obtiene:

$$T_y\,d = V_2\cdot 30 + (R_2 - R_1)\cdot 40 \qquad \Rightarrow \qquad d = 23,921\,\text{cm}$$

que proporciona la posición del centro de esfuerzos cortantes C sobre el eje de simetría de la sección. Puede observarse que éste se encuentra a 3,921 cm del centro de gravedad, desplazado en el sentido del alma de mayor inercia.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

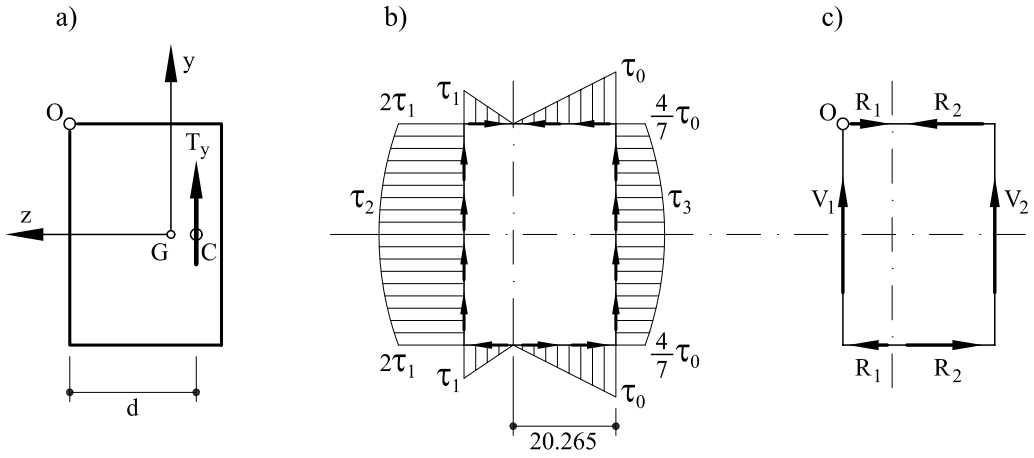

Fig. 6.50: Determinación del centro de esfuerzos cortantes

6.9 Secciones de varios materiales

La deducción de las expresiones para la determinación de las tensiones tangenciales debidas al esfuerzo cortante en secciones formadas por varios materiales puede realizarse de forma análoga a como se ha hecho en este Capítulo para secciones homogéneas, sin más que trabajar sobre la *sección homogeneizada* (ver Sección 4.6 y Apéndice A) y con las correspondientes magnitudes *mecánicas* sustituyendo a las homólogas geométricas.

Así, por ejemplo, consideremos una sección formada por varios materiales. Para cada punto de las sección se puede definir un *coeficiente de equivalencia* con el material de referencia de la forma $n = E/\overline{E}$, donde $\overline{E}$ es el módulo de elasticidad de referencia.

La formula de Collignon adopta ahora la forma:

$$\tau_{\text{med}} = \frac{T_y \, \overline{m}_z^e(\Omega)}{\overline{I}_z \, l_{AB}} \tag{6.88}$$

donde $\overline{I}_z$ es el momento de inercia mecánico de la sección homogeneizada respecto del eje z, eje principal de inercia *mecánico* y $\overline{m}_z^e(\Omega)$ es el momento estático mecánico del área homogeneizada Ω respecto a dicho eje, que se calcula como

$$\overline{m}_z^e(\Omega) = \int_S y \; n \, dS \tag{6.89}$$

Análogamente, el concepto de *centro mecánico de esfuerzos cortantes* se define como el centro de esfuerzos cortantes de la sección homogeneizada.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ejemplo 6.9.1

Calcular la posición del centro de esfuerzos cortantes de la sección en doble T de la Figura 6.51, en la que el material del ala inferior tiene un coeficiente de equivalencia $n = 2$. Las dimensiones son $h = 40$ cm, $b = 20$ cm, $e' = 2$ cm y $e = 1$ cm.

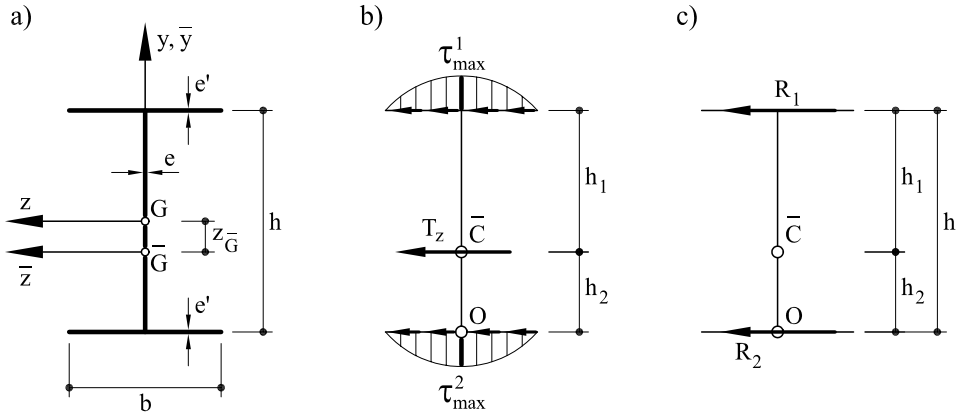

Fig. 6.51: Determinación del centro mecánico de esfuerzos cortantes

(a) Calculamos primero las características mecánicas de la sección. Dada la simetría de la sección respecto del eje y el centro mecánico $\overline{G}$ estará situado sobre dicho eje y por debajo del centro de gravedad G. La ordenada de $\overline{G}$ respecto de G es:

$$\begin{aligned} z_{\overline{G}} &= \frac{be'\frac{h}{2} + nbe'\left(-\frac{h}{2}\right)}{be' + he + nbe'} \\ &= \frac{20 \cdot 2 \cdot 20 + 2 \cdot 20 \cdot 2 \cdot (-20)}{20 \cdot 2 + 40 \cdot 1 + 2 \cdot 20 \cdot 2} \\ &= -5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Por tanto el eje principal de inercia mecánico $\overline{y}$ coincide con el eje y. El momento de inercia mecánico de la sección respecto al eje $\overline{y}$, $\overline{I}_{\overline{y}}$, es aproximadamente igual a la suma de las inercias mecánicas de las dos alas, $\overline{I}_{\overline{y}}{}^1 + \overline{I}_{\overline{y}}{}^2$:

$$\begin{aligned} \overline{I}_{\overline{y}} &= \overline{I}_{\overline{y}}{}^1 + \overline{I}_{\overline{y}}{}^2 \\ &= \frac{b^3 e'}{12} + n\frac{b^3 e'}{12} \\ &= 1.333,33 + 2.666,66 \\ &= 4.000 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

(b) Dada la simetría de la sección respecto del eje $\overline{y}$ el centro mecánico de esfuerzos cortantes $\overline{C}$ estará situado sobre dicho eje. Supongamos que esté en un punto intermedio del alma, a una distancia h_1 del ala superior y h_2 del ala inferior ($h_1 + h_2 = h$). Calculamos, a continuación, la distribución de tensiones tangenciales correspondiente a un esfuerzo cortante horizontal T_z aplicado en dicho centro de esfuerzos cortantes. En virtud de los resultados obtenidos en el Ejercicio 6.5.2.2, la distribución de tensiones sobre las alas es parabólica, con valor nulo en los extremos y valor máximo en el punto de unión con el alma, tal como se representa en la Figura 6.51b.

El valor máximo de la tensión tangencial en el ala superior es:

$$\tau_1^{\max} = \frac{T_z \left(\frac{b}{2} e' \frac{b}{4}\right)}{\overline{I}_{\overline{y}}\, e'} = \frac{T_z\, b^2}{8\, \overline{I}_{\overline{y}}}$$

El valor de R_1, resultante de las tensiones tangenciales en el ala superior, puede calcularse hallando el área del diagrama de tensiones tangenciales y multiplicando por el espesor e':

$$R_1 = \frac{2}{3}\tau_1^{\max} b e' = \frac{T_z\, b^3 e'}{12\, \overline{I}_{\overline{y}}} = T_z \frac{\overline{I}_{\overline{y}}{}^1}{\overline{I}_{\overline{y}}}$$

Análogamente, el valor máximo de la tensión tangencial en el ala inferior es:

$$\tau_2^{\max} = \frac{T_z\, n \left(\frac{b}{2} e' \frac{b}{4}\right)}{\overline{I}_{\overline{y}} e'} = 2\frac{T_z\, b^2}{8\, \overline{I}_{\overline{y}}}$$

El valor de R_2, resultante de las tensiones tangenciales en el ala inferior, es:

$$R_2 = \frac{2}{3}\tau_2^{\max} b e' = 2\frac{T_z\, b^3 e'}{12 \overline{I}_{\overline{y}}} = T_z \frac{\overline{I}_{\overline{y}}{}^2}{\overline{I}_{\overline{y}}}$$

Puede observarse que se cumple que $T_z = R_1 + R_2$, ya que $\overline{I}_{\overline{y}} = \overline{I}_{\overline{y}}{}^1 + \overline{I}_{\overline{y}}{}^2$, y también que las alas se reparten el cortante de forma proporcional a sus respectivas inercias.

Igualando ahora momentos respecto al punto O, unión del alma con el ala inferior, se tiene:

$$T_z\, h_2 = R_1 h \qquad \Rightarrow h_2 = \frac{R_1}{T_z}\, h = \frac{\overline{I}_{\overline{y}}{}^1}{\overline{I}_{\overline{y}}}\, h$$

de donde

$$h_2 = \frac{\overline{I}_{\overline{y}}{}^1}{\overline{I}_{\overline{y}}}\, h = \frac{h}{3} = 13,33 \text{ cm}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

7 Momento Torsor

7.1 Introducción

Una pieza prismática está sometida a *torsión simple* cuando sobre sus secciones actúa únicamente un momento resultante que tiene componente sólo según el eje x de la pieza, es decir, un *momento torsor*, M_t (ver Figura 7.1). En el caso particular de que el momento torsor actuante sea constante a lo largo de la pieza, se dice que el estado es de *torsión pura*.

Recordemos que la determinación del momento torsor debe hacerse respecto al centro de esfuerzos cortantes C de la sección, para poder determinar de esa manera el *momento torsor real* que actúa sobre ella (ver Sección 6.8 dedicada al *centro de esfuerzos cortantes* en el Capítulo precedente). En este Capítulo se entenderá siempre que el momento torsor M_t al que se hace referencia es el momento torsor *real* y, por tanto, se prescindirá del calificativo correspondiente.

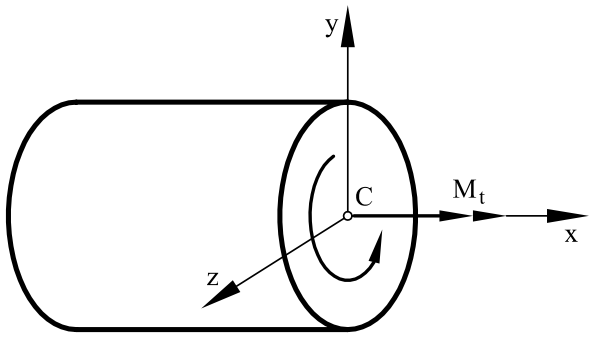

Fig. 7.1: Pieza sometida a momento torsor

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

La actuación de un momento torsor sobre la sección implica la aparición de tensiones tangenciales sobre la sección, de tal forma que se cumplan las relaciones integrales:

$$\vec{T} = \int_S \vec{\tau}\ dS = 0 \qquad ; \qquad \vec{M}_t = \int_S \vec{r_c} \times \vec{\tau}\ dS \tag{7.1}$$

donde $\vec{r_c}$ es el vector de posición respecto al centro de esfuerzos cortantes. Como en casos anteriores, dichas ecuaciones no bastan para determinar la distribución de tensiones tangenciales, por lo que es necesario hacer hipótesis sobre la deformación de la rebanada, cuya validez debe ser avalada por la experiencia.

El estudio general de piezas prismáticas sometidas a momento torsor es un tema complejo que escapa de las hipótesis fundamentales en las que se basa la Resistencia de Materiales. La dificultad principal consiste en que, en general, las secciones sometidas a torsión no permanecen planas, sino que sufren deformación fuera de su plano, fenómeno conocido con el nombre de *alabeo*. En función de este hecho, se distingue entre *torsión uniforme*, cuando el alabeo relativo es despreciable, y torsión *no uniforme*, cuando el alabeo relativo debe ser considerado.

La torsión uniforme se estudia mediante la teoría de Coulomb, válida para secciones en las que no se produce alabeo de la sección, y la teoría de Saint-Venant, más general, válida para situaciones sin alabeo relativo. Ambas teorías son compatibles con el planteamiento general de la Resistencia de Materiales. Por el contrario, cuando el alabeo relativo es relevante *no se cumple el principio de Saint-Venant*, es decir, las tensiones en una sección no dependen exclusivamente del valor del momento torsor sobre ella. En estas situaciones el estudio queda, estrictamente hablando, fuera del campo de aplicación de la Resistencia de Materiales. El problema se puede resolver con un planteamiento *ad hoc* adecuado, lo que se conoce como *teoría de la torsión no uniforme*, o mediante el planteamiento general de la teoría de la elasticidad.

En este Capítulo se estudiará en detalle la torsión simple de barras cilíndricas de sección circular, mediante la teoría de Coulomb. Se introducirá, asimismo, la teoría de Saint-Venant para torsión uniforme, y se describirán las analogías oportunas para considerar la torsión de piezas de sección arbitraria, obteniéndose resultados de interés práctico para el estudio de perfiles de pequeño espesor, tanto abiertos como cerrados. En resumen, en lo que sigue se tratará fundamentalmente el caso de torsión uniforme; aunque en la Sección 7.4 se describe brevemente el tratamiento de situaciones de torsión no uniforme, se deja para los libros especializados el tratamiento detallado de ésta.

Debe recordarse que, adicionalmente al momento torsor, pueden actuar sobre la sección esfuerzos axiles, flectores y cortantes. En tal caso, y suponiendo que el principio de superposición es aplicable, los resultados obtenidos en este Capítulo para la torsión uniforme deben completarse con los obtenidos en los Capítulos anteriores.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

7.2 Torsión de Coulomb

7.2.1 Sección circular

Consideremos una pieza prismática recta de sección circular constante, sometida a un estado de *torsión pura* bajo la acción de dos momentos M_t, iguales y de sentidos opuestos, aplicados en sus secciones extremas.

Sencillas consideraciones geométricas, basadas en la simetría de la pieza y de la solicitación (ver Figura 7.2), nos permiten asegurar que, para este caso, en la deformación por torsión:

- las secciones rectas giran alrededor de su centro de gravedad, por simetría axial respecto al eje de la pieza.
- las secciones rectas se conservan circulares y planas en la deformación. En efecto, las secciones deben permanecer circulares por simetría axial respecto al eje de la pieza. Además, deben permanecer planas por simetría de la solicitación respecto de cualquier sección recta.
- los radios de la sección se conservan rectos en la deformación, por simetría de la solicitación respecto de cualquier sección recta.

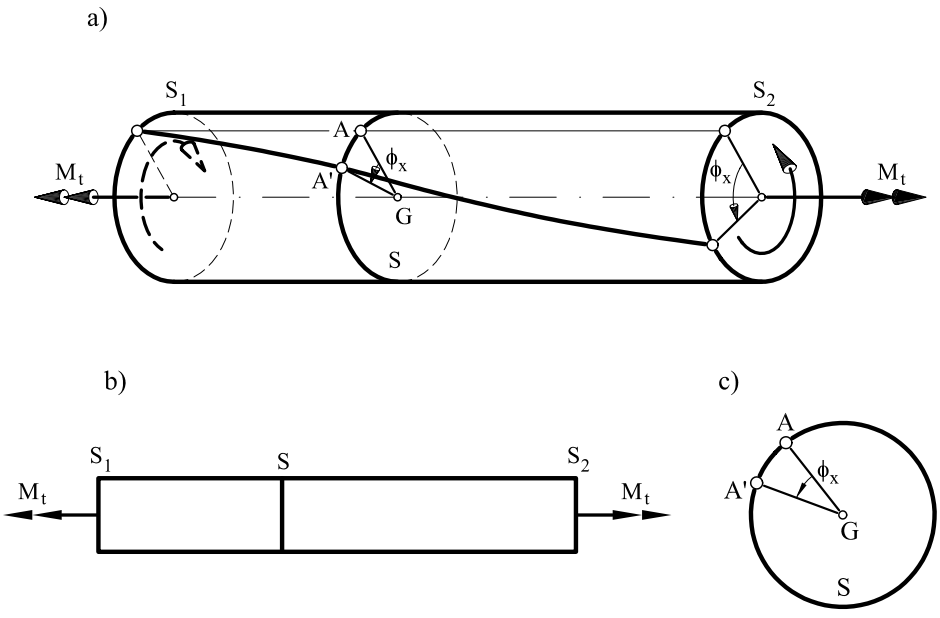

Fig. 7.2: Pieza de sección circular sometida a torsión pura

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

- el ángulo entre dos radios cualesquiera de la sección permanece inalterado en la deformación, por simetría axial respecto al eje de la pieza.

En resumen, la deformación por torsión de piezas rectas de sección circular se puede describir mediante la hipótesis de C. A. de Coulomb (1784), que puede enunciarse:

"*en una pieza recta de sección circular sometida a torsión pura, la deformación es tal que cada sección gira alrededor de su centro sin deformarse en su plano y sin alabearse, como si fuera un disco rígido. Las fibras longitudinales de la pieza se deforman en hélices*".

Bajo la hipótesis de pequeños movimientos y deformaciones, los giros de torsión son suficientemente pequeños y la curvatura de los arcos de hélice de las fibras deformadas puede suponerse despreciable, es decir, éstos pueden suponerse rectilíneos.

La hipótesis de deformación de Coulomb puede verificarse experimentalmente y concuerda con los resultados de la Teoría de la Elasticidad, incluso cuando el momento torsor es variable a lo largo del eje de la pieza, es decir, en situaciones de *torsión simple*.

Obsérvese, por último, que la hipótesis de Coulomb es puramente geométrica, es decir, no presupone comportamiento elástico del material de la pieza. En lo que sigue supondremos que el material es elástico y, además, que la ley de Hooke es aplicable.

Analicemos una rebanada diferencial de longitud dx de una pieza prismática de sección circular sometida a *torsión simple*, tal como se muestra en la Figura 7.3a. Consideremos en ella el elemento diferencial $ABCD$, situado sobre un cilindro de radio ρ, concéntrico con el eje de a pieza; dicho elemento se deformará a torsión según el "paralelogramo" $ABC'D'$ de la Figura 7.3b, donde AC' y BD' son segmentos de hélice de longitud infinitesimal, por lo que pueden considerarse rectilíneos. La deformación angular del elemento vendrá dada por:

$$\gamma \simeq \tan\gamma = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = \frac{\rho\, d\phi_x}{dx} = \rho\,\theta \tag{7.2}$$

donde se ha introducido el ángulo de torsión, ϕ_x, y el ángulo de torsión por unidad de longitud, $\theta = d\phi_x/dx$. Obsérvese que el giro de torsión, ϕ_x, es un ángulo, por tanto, es adimensional, y se mide en radianes [rad]. Por el contrario, el giro de torsión por unidad de longitud, θ, es un ángulo por unidad de longitud y se mide en [rad/L] .

Se tiene, por consiguiente, que las distorsiones son proporcionales a ρ:

$$\gamma = \rho\,\theta \tag{7.3}$$

De acuerdo con la ley de Hooke, la tensiones tangenciales en el elemento $ABCD$ son proporcionales a las deformaciones, de la forma:

$$\tau = G\,\gamma = G\,\rho\,\theta \tag{7.4}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

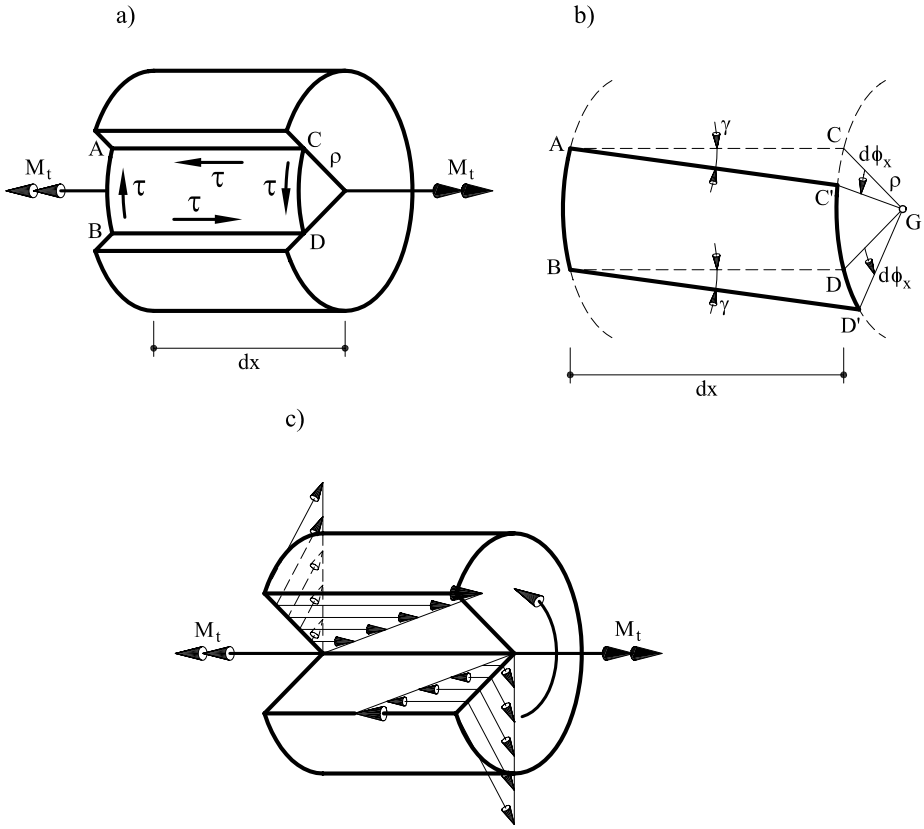

Fig. 7.3: Rebanada sometida a torsión de Coulomb

donde G es el módulo de rigidez a cortante del material. Estas tensiones tangenciales tienen las direcciones y sentidos que se muestran en las Figuras 7.3a y c. Se observa que las tensiones tangenciales en un punto de la sección son perpendiculares al radio que pasa por dicho punto, y que varían linealmente con la distancia ρ al centro de la sección. Por tanto, los valores máximos se dan en el contorno de ésta.

El momento resultante de las tensiones tangenciales debe ser igual al momento torsor actuante M_t; por consiguiente:

$$M_t = \int_S \rho\, \tau\, dS = \int_S G\, \theta\, \rho^2\, dS = G\, \theta \int_S \rho^2\, dS = G\, \theta\, I_p \tag{7.5}$$

donde I_p es el momento polar de inercia de la sección circular. Para un círculo de radio r, es $I_p = \pi\, r^4/2$, y el giro de torsión por unidad de longitud θ vale:

$$\theta = \frac{M_t}{G\, I_p} \tag{7.6}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

El producto GI_p se denomina *rigidez torsional* de la sección. Sustituyendo este valor en la expresión (7.4) de las tensiones tangenciales, se obtiene:

$$\tau = \frac{M_t\,\rho}{I_p} \tag{7.7}$$

Por tanto, en una sección circular el valor de la tensión tangencial máxima se da en la circunferencia exterior y su valor viene dado por la expresión:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t\,r}{I_p} = \frac{2M_t}{A\,r} = \frac{M_t}{W_t} \tag{7.8}$$

Por analogía con la teoría de flexión, al valor $W_t = I_p/r{=}Ar/2 = \pi r^3/2$ se le llama *módulo de torsión* de la sección.

Es interesante resaltar que los elementos diferenciales tales como el de la Figura 7.4 están sometidos a cortante puro. A este estado tensional le corresponden tensiones principales $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{\max}$ en direcciones a $\pm 45^\circ$ con el eje longitudinal de la pieza. Si el material de la pieza tiene resistencias a tracción y compresión de valores parecidos, la rotura a torsión se produce en un plano perpendicular al eje de la pieza, cuando la tensión tangencial máxima alcanza el valor de rotura. Este tipo de rotura es común en la mayoría de los metales y generalmente es de carácter dúctil. Por el contrario, si el material de la pieza resiste menos a tracción que a compresión la rotura se produce por tracción, apareciendo grietas helicoidales a 45° con el eje de la pieza. Este tipo de rotura es, generalmente, de carácter frágil y se da en materiales como el hierro fundido, el hormigón o las rocas.

Obsérvese también que la distribución de tensiones encontrada cumple la igualdad:

$$\overrightarrow{T} = \int_S \overrightarrow{\tau}\,dS \equiv 0 \tag{7.9}$$

debido a la simetría radial de la distribución de tensiones tangenciales sobre la sección.

El giro total de la pieza debido a torsión, entre sus secciones extremas, es:

$$\phi_x = \int_l \theta\,dx = \int_0^l \frac{M_t\,(x)}{G\,I_p\,(x)}\,dx \tag{7.10}$$

donde l es la longitud total de la pieza. En el caso particular de torsión pura y pieza de sección constante, el giro total de torsión resulta:

$$\phi_x = \frac{M_t\,l}{G\,I_p} \tag{7.11}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

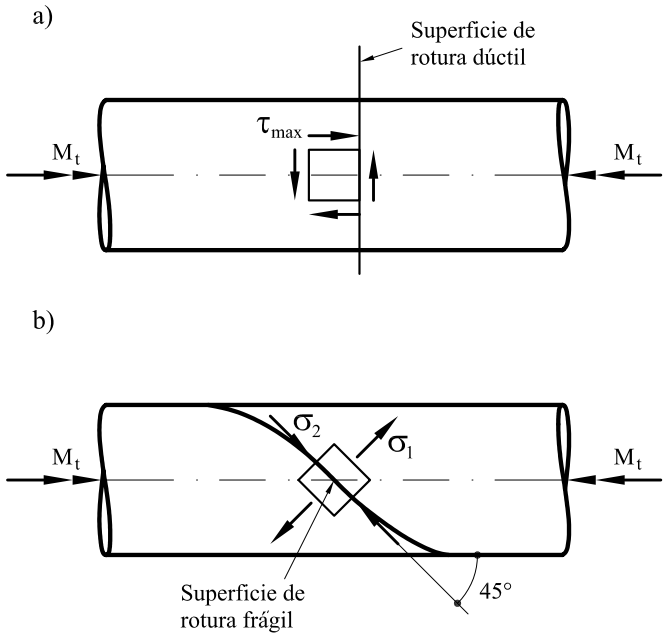

Fig. 7.4: Superficies de rotura de pieza sometida a torsión de Coulomb: (a) rotura dúctil, (b) rotura frágil

7.2.2 Sección circular de varios materiales

Consideremos una sección circular formada por varios materiales dispuestos de forma concéntrica, esto es, consideremos que la sección recta de la pieza está dividida en varias zonas Ω_i, cada una de las cuales corresponde a un material que tiene un módulo de rigidez tranversal G_i, tal como se muestra en la Figura 7.5a.

Consideremos también un *material de referencia*, que puede ser o no igual a uno de los materiales componentes de la pieza, y que tiene un módulo de rigidez transversal $\overline{G}$. Para cada material de la sección se puede definir un *coeficiente de equivalencia* con el material de referencia de la forma $n_i = G_i/\overline{G}$.

Las consideraciones geométricas que conducen a la hipótesis de Coulomb y la expresión de las distorsiones angulares derivada de ella, ecuación (7.3), obtenida en la Sección anterior, es obviamente aplicable también en este caso. Así, de acuerdo con la ley de Hooke, la tensión tangencial en un punto de la sección es proporcional a las deformaciones, de la forma:

$$\tau = G\,\gamma = n\overline{G}\,\gamma = n\overline{G}\,\rho\,\theta \tag{7.12}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

El momento resultante de las tensiones tangenciales debe ser igual al momento torsor actuante M_t:

$$M_t = \int_S \rho\, \tau\, dS = \int_S n\overline{G}\, \theta\, \rho^2\, dS = \overline{G}\, \theta \int_S \rho^2 n\, dS = \overline{G}\, \theta\, \overline{I_p} \tag{7.13}$$

donde $\overline{I_p}$ es el momento polar de inercia *mecánica* de la sección circular. Por tanto, el giro de torsión por unidad de longitud θ vale:

$$\theta = \frac{M_t}{\overline{G}\,\overline{I_p}} \tag{7.14}$$

Sustituyendo este valor en la expresión (7.12) de las tensiones tangenciales se obtiene:

$$\tau = n\frac{M_t\, \rho}{\overline{I_p}} \tag{7.15}$$

La distribución correspondiente de tensiones tangenciales es lineal "a trozos". En la Figura 7.5a se muestra esta distribución para una sección compuesta de dos materiales tales que $G_1 < G_2$.

7.2.3 Sección circular hueca

La distribución lineal de tensiones tangenciales obtenida para una sección circular maciza permite observar que en dicha sección el material está poco aprovechado, ya que si el radio de la sección se dimensiona para que las fibras exteriores trabajen a la

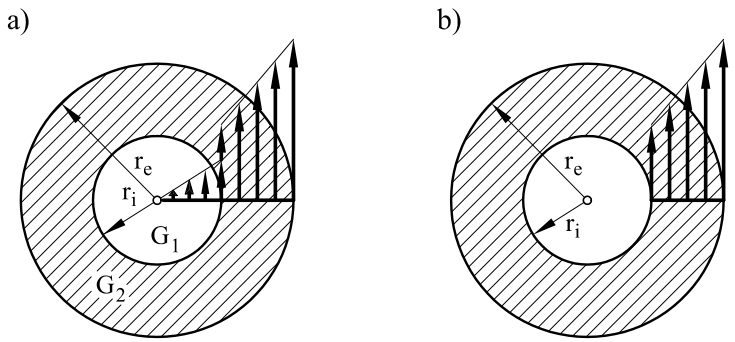

Fig. 7.5: Distribución de tensiones: (a) sección circular de varios materiales (b) sección circular hueca

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

tensión admisible, las fibras interiores trabajarán a una tensión considerablemente inferior. Puede conseguirse un mejor aprovechamiento del material utilizando una sección circular hueca.

Consideremos una sección circular hueca, con r_e y r_i como radios exterior e interior de la sección, respectivamente, tal como se muestra en la Figura 7.5b. Las consideraciones geométricas y las expresiones obtenidas en las dos Secciones anteriores son, obviamente, aplicables también en este caso. De hecho, la sección hueca puede considerarse "compuesta" por dos materiales, de los cuales el material "interior" tiene un coeficiente de equivalencia nulo, y la distribución de tensiones en una sección tubular es la representada en la Figura 7.5b.

El momento de inercia polar I_p y el módulo de torsión de la sección hueca valen:

$$I_p = \frac{\pi\,(r_e^4 - r_i^4)}{2} \qquad \text{y} \qquad W_t = \frac{I_p}{r_e} = \frac{\pi\,(r_e^4 - r_i^4)}{2\,r_e} \tag{7.16}$$

Además, si el espesor de la sección es pequeño en relación al radio exterior se tiene:

$$r_e^4 - r_i^4 = (r_e^2 + r_i^2)(r_e + r_i)(r_e - r_i) \simeq 4\,r_m^3\,e \tag{7.17}$$

donde r_m es el radio de la línea media de la sección ($r_m = (r_e + r_i)/2$) y e es el espesor ($e = r_e - r_i$). Ahora, se puede aproximar

$$I_p \simeq 2\pi\,r_m^3\,e = A\,r_m^2 \qquad \text{y} \qquad W_t = \frac{I_p}{r_m} \simeq A\,r_m \tag{7.18}$$

con $A = 2\pi r_m e$, igual al área de la sección. De esta manera, en una sección circular hueca de pequeño espesor, la tensión tangencial debida al momento torsor M_t se puede considerar *uniforme* en toda la sección y de valor:

$$\tau_{med} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{A\,r_m} \tag{7.19}$$

Se observa así que el material está muy bien aprovechado en las secciones tubulares de pequeño espesor solicitadas a torsión, ya que todo el material está sometido a tensión prácticamente uniforme.

7.3 Torsión de Saint-Venant

7.3.1 Formulación general

Como hemos visto, la solución del problema de la torsión de una pieza de sección circular se obtiene admitiendo como hipótesis de deformación que las secciones rectas de la pieza

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

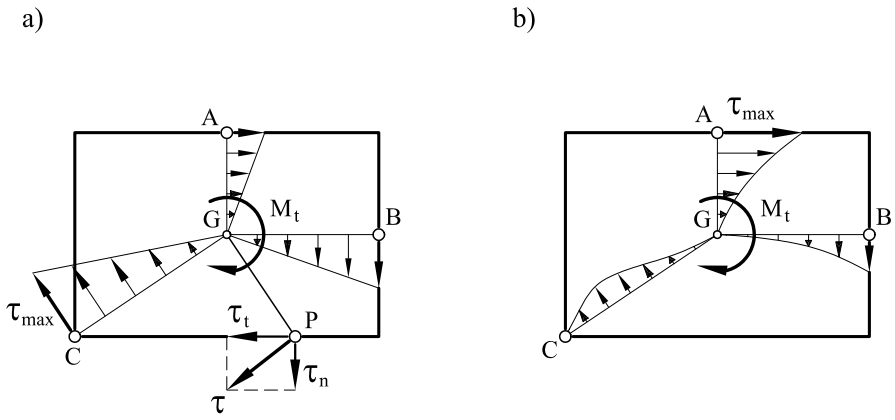

Fig. 7.6: Distribución de tensiones tangenciales de torsión en una sección rectangular: (a) teoría de Coulomb, (b) teoría de Saint-Venant

permanecen planas y giran sin deformarse. Esta hipótesis, formulada por Coulomb, fue aplicada más tarde por Navier al caso de una pieza prismática de sección rectangular, llegando a la conclusión *errónea* siguiente: para un determinado momento torsor M_t, el ángulo de torsión es inversamente proporcional al momento polar de inercia respecto al baricentro de la sección y los valores máximos de la tensión tangencial se producen en los puntos más alejados de dicho punto.

Esta hipótesis está en contradicción con las condiciones de contorno, tal como se muestra en la Figura 7.6a, ya que de acuerdo con esta teoría de Navier, en todo punto P del contorno, la tensión tangencial debería actuar según la dirección normal al "radio" GP. Entonces, la tensión τ se podría descomponer según las direcciones y, z, para obtener sus dos componentes τ_{xy} y τ_{xz}. Según el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales debería entonces existir una tensión τ_{yx} en el punto P, sobre la superficie lateral de la pieza. Esto está en contradicción con el hecho de que, en general, la superficie lateral de la pieza está libre de tensiones rasantes.

En ensayos experimentales realizados con piezas de sección rectangular se comprueba que:

- la distorsión angular es máxima en los puntos medios de los lados más largos del rectángulo, que no son los puntos más alejados del baricentro de la sección, mientras que en las esquinas, que sí lo son, la distorsión es nula. Esto implica que la distribución real de tensiones tangenciales en una sección rectangular es tal como se muestra en la Figura 7.6b.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

- las secciones rectas de las piezas *no permanecen planas* al ser sometidas a torsión, sino que se alabean.

Estas evidencias experimentales indican claramente que la teoría de Coulomb no es adecuada para representar el fenómeno de torsión en piezas de sección no circular.

La solución exacta del problema de *torsión uniforme* en piezas prismáticas de forma arbitraria fue obtenida por Saint-Venant (1853), suponiendo que la deformación es *uniforme*, esto es, idéntica para todas las secciones de la pieza y que consiste en:

(a) una *rotación rígida* de las secciones en su plano, y

(b) un *alabeo* de las secciones fuera de su plano.

En el Libro 2 se demostrará que el centro de giro de las secciones en su plano es, precisamente, el centro de esfuerzos cortantes, cuya posición puede calcularse tal y como se mostró en el Capítulo 6. Por esta razón, al centro de esfuerzos cortantes se le llama también *centro de torsión* de la sección. En torsión uniforme, al lugar geométrico de los centros de torsión se le llama *eje de torsión,* y es un eje paralelo a la directriz de la pieza.

En la Figura 7.7 se muestra la deformación en torsión pura de dos piezas prismáticas, una de sección circular y otra de sección rectangular. La pieza de sección circular se

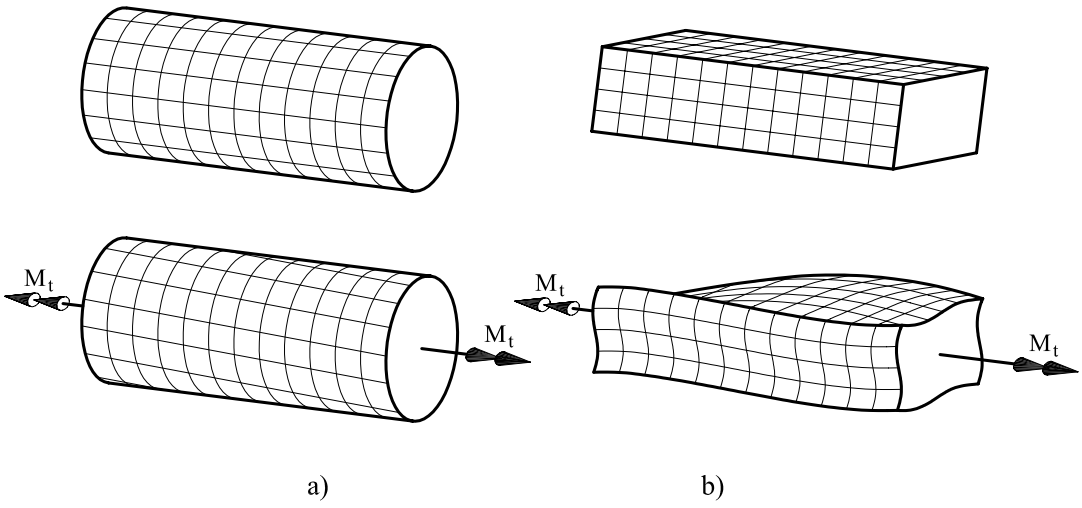

Fig. 7.7: Deformación por torsión: (a) pieza de sección circular (b) pieza de sección rectangular

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

deforma según la hipótesis de Coulomb, esto es, sin alabeo, y las secciones rectas permanecen planas. Por el contrario, la pieza de sección rectangular se deforma según la hipótesis de Saint-Venant, y las secciones rectas giran en su plano y además dejan de ser planas, es decir, se alabean. Obviamente, la teoría de Coulomb es un caso particular de la teoría de Saint-Venant en el que el alabeo es nulo.

En la teoría de Saint-Venant tanto el giro de torsión por unidad de longitud, θ, como el alabeo son uniformes a lo largo de la pieza. Obviamente, el suponer que el alabeo es uniforme para todas las secciones simplifica el planteamiento del problema, ya que de esta forma no aparecen tensiones normales debidas al fenómeno de alabeo. Sin embargo, es frecuente que una pieza sometida a torsión tenga alguna sección transversal obligada a permanecer fija, como es el caso de las secciones de empotramiento que no pueden alabearse durante la torsión. Esta restricción del alabeo de una sección transversal da lugar a la aparición de torsión no uniforme a lo largo de la pieza. La influencia que el alabeo no uniforme tiene en el comportamiento de una pieza solicitada a torsión puede ser importante cuando las secciones rectas son abiertas y de pequeño espesor, pero es despreciable en los restantes tipos de secciones. En la Sección 7.4 se describe brevemente el tratamiento de estas situaciones.

El estudio completo del problema de la torsión uniforme (o de Saint-Venant) se hace mediante la teoría de la Elasticidad. Una forma clásica de plantearlo fue propuesta por L. Prandtl en 1903. Se supone que existe una función escalar $\phi = \phi(y, z)$, llamada *función de tensión,* tal que las tensiones tangenciales vienen dadas por las derivadas parciales de dicha función, esto es:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad ; \qquad \tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{7.20}$$

Se puede demostrar que la imposición de las *condiciones de compatibilidad* que deben cumplirse en el problema elástico sobre las distorsiones angulares de torsión pura derivadas de las ecuaciones (7.20) implica que la función ϕ satisfaga la ecuación diferencial (en derivadas parciales):

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\theta \tag{7.21}$$

con la condición de contorno de que la función de tensión sea constante a lo largo del contorno de la sección. La solución de esta ecuación para secciones de forma arbitraria es un problema matemático complejo, que a menudo se resuelve mediante métodos numéricos aproximados, tales como las diferencias finitas, los elementos finitos o los elementos de contorno.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

7.3.2 Analogía de la membrana

De forma alternativa a la resolución de la ecuación (7.21) mediante métodos analíticos o numéricos, la solución de los problemas de torsión uniforme puede abordarse mediante la *analogía de la membrana*, introducida también por Prandtl (1903). Imaginemos una membrana elástica homogénea cuyos bordes se mantienen fijos sobre un contorno igual a la sección recta de la pieza que se desea estudiar, sometida a una tracción uniforme en sus bordes y a una presión normal también uniforme (ver Figura 7.8a). Si la sección es multiplemente conexa, es decir, tiene huecos interiores, éstos se cubren con placas rígidas de peso despreciable (ver Figura 7.8b).

Sea q la presión normal por unidad de superficie de la membrana y Q la tracción uniforme por unidad de longitud del contorno de la misma. Llamando $\phi = \phi(y, z)$ a la función que proporciona la flecha de la membrana en cada punto del plano yz se tiene que la ecuación diferencial en derivadas parciales de la deformada de la membrana es:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{q}{Q} \tag{7.22}$$

con la condición de contorno $\phi = 0$ a lo largo del contorno de la sección (y $\phi = cte$ sobre el contorno de los huecos interiores, si los hay). Esta ecuación es análoga a la obtenida por Prandtl para la función de tensión del problema de la torsión, y completamente idéntica a ella si se toma $q/Q = 2G\theta$. Por tanto, mediante la representación de la superficie deformada de la membrana por curvas de nivel se pueden obtener, *por analogía* con la función de tensiones, varias conclusiones importantes relativas a la distribución de tensiones tangenciales en el problema de la torsión:

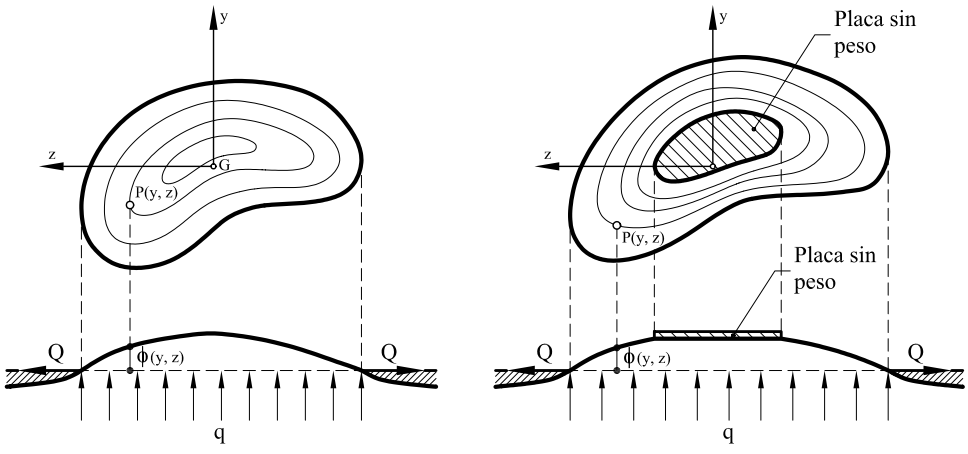

Fig. 7.8: Analogía de la membrana: (a) dominio conexo (b) dominio con "hueco"

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

(a) La componente de la tensión tangencial en un punto según la dirección normal a la curva de nivel de la membrana que pasa por dicho punto es nula. Sea $\vec{n}(\frac{\partial z}{\partial s}, -\frac{\partial y}{\partial s})$ el vector normal a la curva de nivel (s es la longitud según la dirección tangente a la curva de nivel). Entonces:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{n} = -\tau_{xz}\frac{\partial y}{\partial s} + \tau_{xy}\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \doteqdot 0 \tag{7.23}$$

al ser la flecha constante a lo largo de la curva de nivel. Por *analogía*, la tensión tangencial en un punto genérico de la sección tiene la dirección de la tangente a la curva de nivel que pasa por dicho punto (ver Figura 7.9). En particular, la tensión tangencial en el contorno es paralela a éste.

(b) La magnitud de la tensión tangencial τ en un punto genérico de la sección se obtiene como:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2} \doteqdot ||\vec{\nabla}\phi|| \tag{7.24}$$

es decir, la tensión tangencial es igual al módulo del gradiente de la función ϕ, o sea, *análoga* (igual) a la pendiente de la membrana en dicho punto (ver Figura 7.9). Por tanto, la tensión tangencial será mayor en las zonas de la sección donde la membrana presente mayor pendiente y cuanto más cercanas estén las curvas de nivel entre sí.

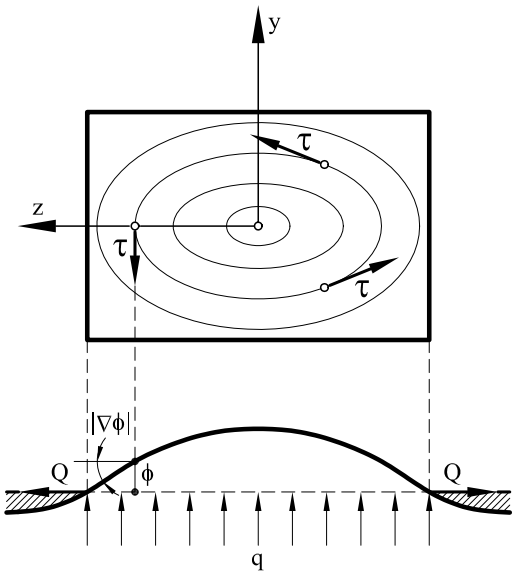

Fig. 7.9: Analogía de la membrana

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

(c) El momento torsor que actúa sobre la sección es *análogo* (igual) al doble del volumen encerrado por la membrana deformada:

$$\begin{aligned} M_t &= \int_S \vec{r}_c \times \vec{\tau}\ dS && (7.25a)\\ &= -\int_S \vec{r}_c \cdot \vec{\nabla}\phi\ dS && (7.25b)\\ &= -\int_S \vec{\nabla}\cdot(\phi\,\vec{r}_c) + \int_S (\vec{\nabla}\cdot\vec{r}_c)\,\phi\, dS && (7.25c)\\ &= 0 + 2\int_S \phi\, dS && (7.25d)\\ &\doteqdot 2V && (7.25e) \end{aligned}$$

donde se ha aplicado el teorema de la divergencia y se ha supuesto, sin pérdida de generalidad, que la sección es un recinto simplemente conexo y que la función ϕ se anula en el contorno.

En las expresiones anteriores la función $\phi = \phi(y, z)$ representa tanto a la función de tensión del problema de torsión como a su análoga, la función flecha en la membrana elástica. Se usa el símbolo ($\doteqdot$) para relacionar entre sí resultados *análogos* al pasar de un problema al otro.

Por tanto, la analogía de la membrana proporciona una imagen cualitativa y cuantitativa de la distribución de tensiones tangenciales que aparecen en una sección sometida a esfuerzo torsor. Así por ejemplo, en una sección rectangular, los vértices A_1, B_1, C_1, D_1 tienen tensión tangencial nula, ya que la pendiente de la membrana es

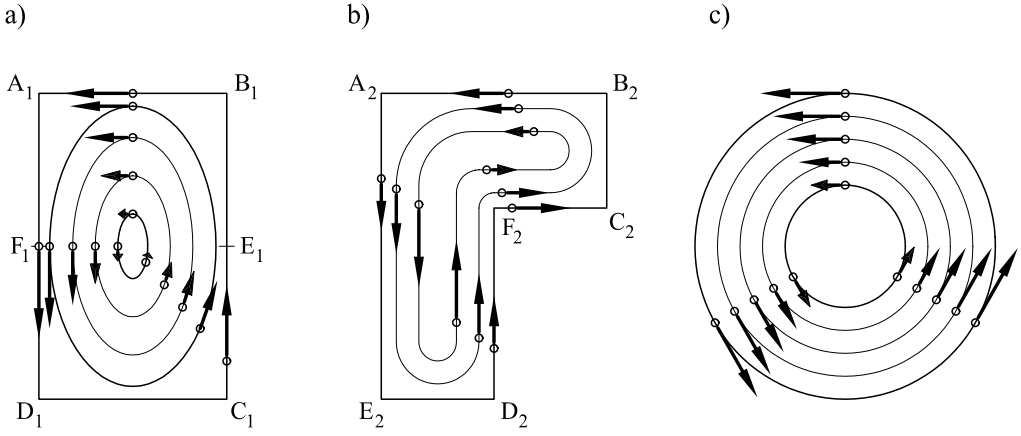

Fig. 7.10: Distribución de tensiones sobre secciones de distintas geometrías

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

nula en dichos puntos, y las trayectorias de tensión son como las de la Figura 7.10a; las tensiones máximas se dan en los puntos medios de los lados más largos, E_1 y F_1, donde la pendiente de la membrana es máxima. Por consideraciones análogas se deduce que en una sección como la de la Figura 7.10b, la tensión es nula en los ángulos salientes $(A_2, B_2, C_2, D_2, E_2)$ e infinita en los ángulos entrantes (F_2). En la práctica, se evita este tipo de singularidad redondeando los ángulos entrantes. En la Figura 7.10c se muestran las trayectorias de tensión para una sección circular hueca; por simetría central, éstas resultan ser circunferencias concéntricas, resultado coincidente con la teoría de Coulomb.

7.3.3 Sección rectangular

La solución del problema de torsión uniforme en piezas de sección rectangular puede obtenerse de forma analítica resolviendo la ecuación (7.21) sobre un dominio rectangular. Sin embargo los métodos que hay que utilizar están más allá del nivel de desarrollo matemático utilizado en este libro. Sin embargo, los resultados de dicho análisis son de indudable valor práctico. A través de la analogía de la membrana se tiene una imagen cualitativa de las trayectorias de tensión obtenidas, esto es, de la dirección de las tensiones tangenciales, que son como las mostradas en la Figura 7.10a. El módulo de la tensión en cada punto de la sección es proporcional a la pendiente de la membrana en dicho punto; la Figura 7.6b muestra una imagen cualitativa del valor de las tensiones a lo largo de algunas rectas radiales.

Para una sección rectangular de lados $b \times c$, donde b es el lado más largo, la máxima tensión tangencial se da en los puntos medios de los lados más largos del rectángulo y vale:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha b c^2} \tag{7.26}$$

donde α es un valor que depende de la relación $b/c > 1$. El giro de torsión por unidad de longitud vale

$$\theta = \frac{M_t}{G\,\beta b c^3} \tag{7.27}$$

donde β también depende de la relación b/c. La Tabla 7.1 proporciona valores de los

b/c	1	1.5	2	3	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,299	0,312	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,299	0,312	0,333

Tabla 7.1: Coeficientes para secciones rectangulares

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

coeficientes α y β para varios valores de esta relación. Obsérvese que tanto α como β tienden a valer 1/3 cuando el rectángulo es largo y estrecho.

7.3.4 Secciones rectangulares estrechas

La analogía de la membrana permite obtener una solución muy sencilla del problema de la torsión de una pieza prismática de sección rectangular estrecha de dimensiones $b \times c$, con $b >> c$.

En efecto, si el rectángulo es suficientemente largo, se puede despreciar el efecto de los extremos de éste sobre la deformación de la membrana en zonas suficientemente alejadas de ellos. Esto equivale a decir que, salvo en las zonas próximas a los extremos, la función que describe la flecha de la membrana sólo depende de la coordenada z (ver Figura 7.11a), o sea, que es $\phi = \phi(z)$. Entonces la ecuación (7.22) se reduce a

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = -\frac{q}{Q} \tag{7.28}$$

que puede integrarse fácilmente con las condiciones de contorno (ver Figura 7.11b):

$$\left(\frac{d\phi}{dz}\right)_{z=0} = 0 \qquad ; \qquad \left(\frac{d\phi}{dz}\right)_{z=c/2} = \tan\alpha = -\frac{q\,c/2}{Q} \tag{7.29}$$

para dar la solución:

$$\phi \ = \phi(z) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \ z^2\right]\frac{q}{Q} \tag{7.30}$$

La membrana deformada es, por tanto, un cilindro de sección parabólica (ver Figura 7.11b), en el que la flecha máxima δ es:

$$\delta = \phi(z=0) = \frac{c^2}{8}\frac{q}{Q} \tag{7.31}$$

Además, el volumen limitado por la membrana deformada y el plano yz, calculado como cilindro parabólico es:

$$V = \frac{2}{3}\,\delta\,c\,b = \frac{bc^3}{12}\frac{q}{Q} \tag{7.32}$$

Utilizando la analogía de la membrana y recordando que la relación de analogía es $q/Q \doteqdot 2G\theta$, se obtienen las siguientes expresiones válidas para el problema de torsión:

$$M_t = \frac{1}{3}bc^3G\theta \doteqdot 2V \qquad ; \qquad \tau_{\max} = cG\theta \doteqdot \tan\alpha \tag{7.33}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

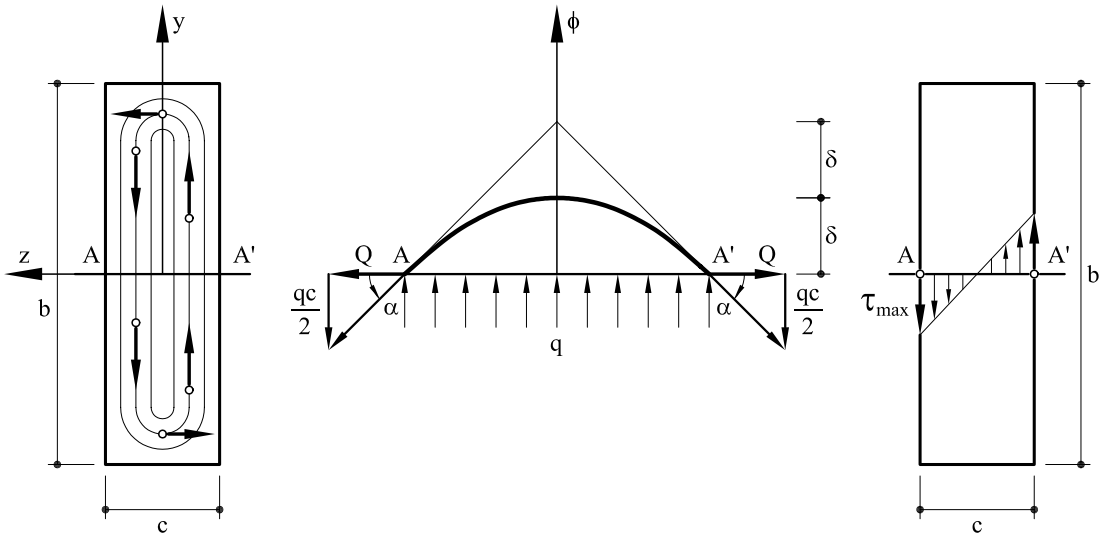

Fig. 7.11: Analogía de la membrana en sección rectangular estrecha

de donde:

$$\theta = \frac{M_t}{G\,\frac{1}{3}bc^3} = \frac{M_t}{GI_t} \qquad \text{y} \qquad \tau_{\max} = \frac{M_t\,c}{\frac{1}{3}bc^3} = \frac{M_t\,c}{I_t} \tag{7.34}$$

donde $I_t = bc^3/3$ es la *inercia a torsión de la sección* y $W_t = I_t/c = bc^2/3$ es el *módulo de torsión*.

Además, en la parábola la pendiente varía linealmente; por tanto, la distribución de tensiones tangenciales, a lo largo de un corte transversal AA', es lineal:

$$\tau(z) = \tau_{\max}\frac{z}{c/2} = \frac{M_t\,2z}{I_t} \tag{7.35}$$

con los valores máximos en los puntos A y A' del contorno.

Las expresiones anteriores son tanto más aproximadas cuanto mayor es la relación b/c. Para $b/c > 10$ pueden considerarse como exactas.

7.3.5 Perfiles laminados abiertos

Las expresiones (7.34) y (7.35), obtenidas para secciones rectangulares estrechas, pueden aplicarse, de forma aproximada, a secciones abiertas delgadas de espesor uniforme que no sean rectangulares, pero que puedan ser "rectificadas" para tomar dicha geometría. En ellas se toma como magnitud "b" la longitud "rectificada" de la línea media de la sección (Figura 7.12). El argumento para esta generalización consiste en suponer

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

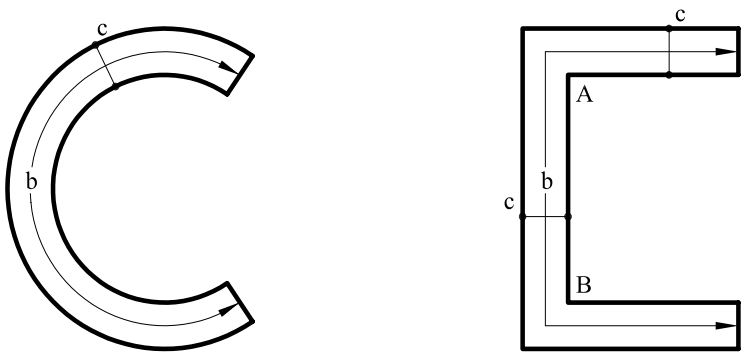

Fig. 7.12: Perfiles abiertos de espesor uniforme

que la deformada de la membrana será, aproximadamente, un cilindro parabólico de longitud b.

Hay que señalar que esta aproximación desprecia los efectos locales que ocurren en los ángulos entrantes de la sección, tales como los ángulos A y B de la Figura 7.12b. Sin embargo, la analogía de la membrana predice que en los ángulos entrantes de dichas uniones la tensiones tienden a infinito. En la práctica, dichas singularidades se evitan redondeando dichos ángulos. Puede demostrarse mediante la teoría de la elasticidad que la relación entre la tensión máxima real, $\overline{\tau}_{\max}$, y la tensión predicha por las expresiones anteriores, $\tau_{\max}$, en estos ángulos es función de la relación R/c entre el radio de curvatura de la unión y el espesor de la pieza, tal como se muestra en la Figura 7.13.

En el caso de perfiles laminados "ramificados", en los que las longitudes y los espesores de las "ramas" que los componen son distintos, pero se cumple que $b_i/c_i >> 1$ (ver Figura 7.14), se considera adecuada la siguiente aproximación.

Sea m_i la parte de momento torsor absorbido por la "rama" $i-ésima$ y sea θ el ángulo de torsión de la sección, supuesta igual para todas las "ramas" (torsión uniforme). Si consideramos que cada rama resiste una fracción del momento torsor total proporcional a su propia rigidez a torsión, m_i, tal que $\sum_i m_i = M_t$, se tiene:

$$\theta = \frac{m_i}{G\frac{1}{3}b_i\, c_i^3} = \frac{M_t}{G\frac{1}{3}\sum_i b_i\, c_i^3} \tag{7.36}$$

Por tanto, se puede definir:

$$I_t = \sum_{i=1}^{n} (I_t)_i = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} b_i\, c_i^3 \tag{7.37}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

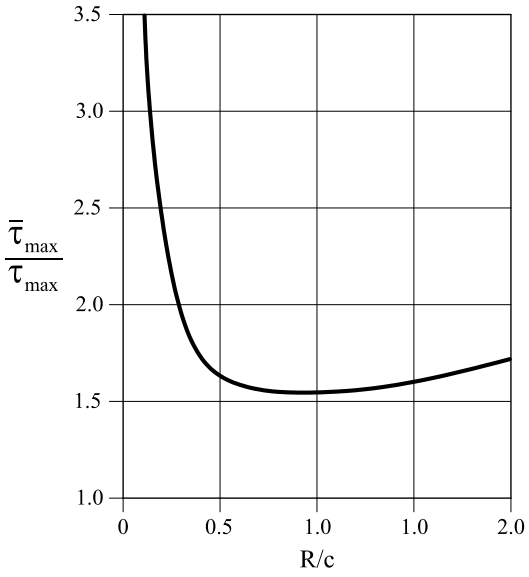

Fig. 7.13: Efecto de concentración de tensiones en ángulos entrantes en función de la relación radio/espesor

como la inercia a torsión de la sección (suma de las correspondientes a las distintas ramas). Además, según la analogía de la membrana, la tensión máxima en cada "rama" se dará a lo largo de su contorno, y valdrá:

$$(\tau_{\max})_i = G\,\theta\,c_i = \frac{M_t\,c_i}{I_t} \tag{7.38}$$

y la tensión máxima se dará en la rama de mayor espesor:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t\,c_{\max}}{I_t}$$

Esto equivale a suponer que cada "rama" que compone el perfil resiste su parte proporcional de momento torsor, independientemente de las demás. En la analogía de la membrana, la deformada total es aproximadamente igual a la deformada de los distintas "ramas" deformándose independientemente. Naturalmente, esta aproximación desprecia los efectos locales que ocurren en las uniones entre las diversas "ramas".

Este tipo de aproximación puede incluso extenderse a secciones abiertas de pequeño espesor formadas por "ramas" de distintos materiales. Basta para ello aplicar el concepto de coeficiente de equivalencia entre los distintos materiales, tal como se definió

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

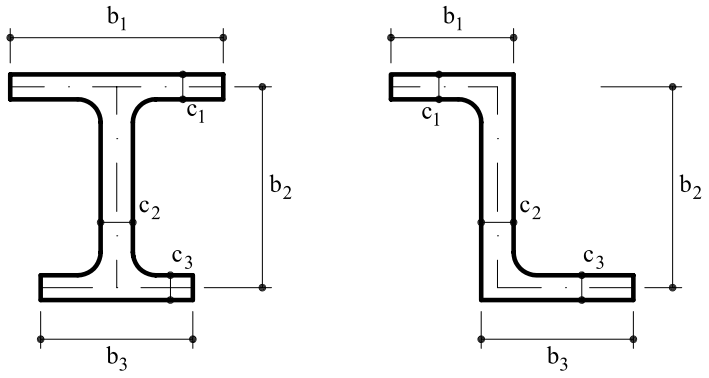

Fig. 7.14: Perfiles abiertos con variación de espesores

en la Sección 7.2.2, como relación entre el módulo de rigidez transversal de cada material y el módulo de referencia $n_i = G_i/\overline{G}$. Puede entonces definirse la inercia a torsión equivalente de la pieza como

$$\overline{I_t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{I_t}\right)_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} n_i \, b_i \, c_i^3 \tag{7.39}$$

y suponer que cada parte de la sección soportará una fracción del momento torsor total proporcional a su propia inercia mecánica. Entonces, el giro de torsión por unidad de longitud será:

$$\theta = \frac{M_t}{\overline{G I_t}} \tag{7.40}$$

Además, la tensión máxima en cada parte de la sección se dará a lo largo de su contorno, y valdrá:

$$\left(\tau_{\max}\right)_i = G_i \, \theta \, c_i = n_i \frac{M_t \, c_i}{\overline{I_t}} \tag{7.41}$$

Hay que señalar, finalmente, que los resultados obtenidos en esta sección son válidos para perfiles laminados abiertos sometidos a torsión uniforme, esto es, suponiendo que el alabeo relativo entre distintas secciones de la pieza es despreciable. Si esta hipótesis no es aceptable, el comportamiento de este tipo de secciones puede ser muy diferente del aquí supuesto. De hecho, debido a las condiciones de apoyo, la torsión es raramente uniforme en piezas compuestas de perfiles abiertos. En la Sección 7.4 se ilustra esta situación de forma indicativa. Se muestra allí como la distribución de tensiones tangenciales en estas situaciones es muy diferente de las obtenidas en esta Sección.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Ejemplo 7.3.5.1

Calcular la inercia a torsión y el máximo momento torsor que puede resistir una pieza de sección anillo circular *abierto* de radio r y espesor e, para una tensión tangencial admisible τ^*.

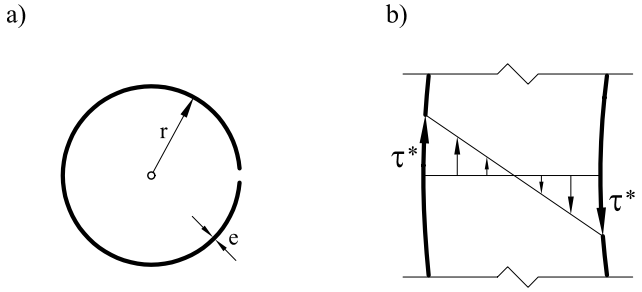

Fig. 7.15: Anilllo circular abierto

La inercia a torsión de la sección es:

$$I_t = \frac{1}{3} b e^3 = \frac{1}{3} 2\pi r\, e^3 = \frac{1}{3} A\, e^2$$

y por tanto, según la ecuación (7.34b),

$$M_t^{\max} = \frac{I_t\, \tau^*}{e} = \frac{1}{3} A\, e\, \tau^*$$

y la tensión τ^* se alcanza sólo a lo largo del contorno de la sección.

Ejemplo 7.3.5.2

El voladizo de la Figura 7.16 trabaja con una carga vertical descendente uniformemente repartida de valor $p = 5$ kN/m (ver Ejemplo 6.8.2.1. del Capítulo 6). Si el plano de actuación de las cargas verticales es el que contiene a los centros de gravedad de las secciones, se pide: (a) Calcular el momento torsor real que actúa sobre cada sección. (b) Calcular el valor máximo de las tensiones tangenciales debidas al momento torsor, en la sección más solicitada. Comparar con los resultados obtenidos en el apartado (b) del Ejemplo 6.8.2.1. y comentar. (c) Calcular el giro de torsión que sufre el extremo del voladizo y comentar el resultado. Tomar $G = 80$ GPa.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

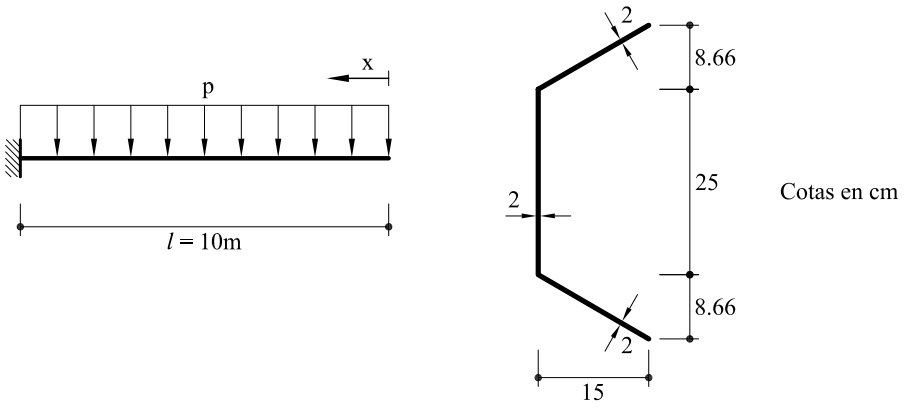

Fig. 7.16: Voladizo del Ejemplo 7.3.5.2

(a) Según se calculó en el Ejemplo 6.8.2.1 el centro de esfuerzos cortantes de la sección C está situado sobre el eje de simetría de la sección, a la izquierda del alma, a 9,606 cm del centro de gravedad G. Al actuar las cargas en el plano que contiene a los centros de gravedad de las secciones y puesto que el centro de esfuerzos cortantes no coincide con el centro de gravedad, se produce en cada sección un momento torsor real de valor:

$$M_t = T_y \cdot \overline{CG} = 9,606 \cdot 10^{-2}\, T_y \ \text{kN} \cdot \text{m}$$

con el cortante T_y expresado en kN.

(b) Al tratarse de un perfil abierto de pequeño espesor, las tensiones tangenciales máximas debidas al momento torsor M_t^* pueden calcularse mediante la expresión:

$$\tau = \frac{M_t^* e}{I_t}$$

siendo e el espesor del perfil. La inercia a torsión de la sección es igual a:

$$I_t = \frac{1}{3} b e^3 = \frac{1}{3}(25 + 2 \cdot 17,32) \cdot 2^3 = 159,04\,\text{cm}^4$$

donde b es la longitud de la línea media del perfil. Por tanto, el valor de la tensión tangencial máxima es:

$$\tau_{\max} = \frac{9,606 \cdot 10^{-2}\, T_y \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{159,04 \cdot 10^{-8}} \ \text{Pa} = 1,208\, T_y \ \text{MPa}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

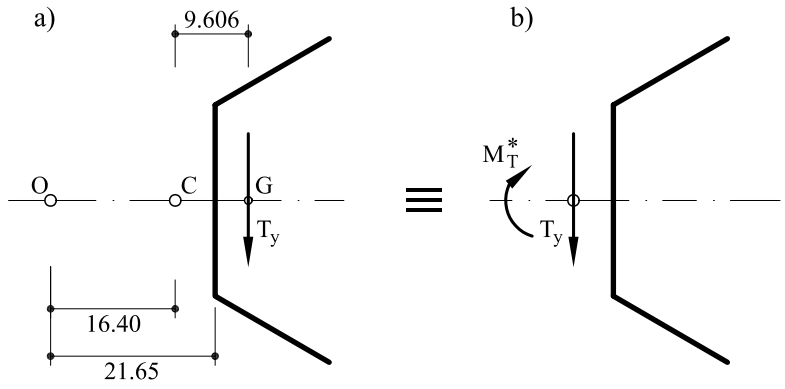

Fig. 7.17: Posición del centro de esfuerzos cortantes y momento torsor real

Para el valor máximo del esfuerzo cortante $T_{\max} = 50$ kN, la tensión tangencial máxima debida a la torsión es $\tau_{\max} = 60,41$ MPa.

Si se compara este resultado con el obtenido en el apartado (b) del Ejemplo 6.8.2.1, se observa que la tensión tangencial máxima debida al momento torsor es aproximadamente siete veces mayor que la tensión tangencial máxima debida al esfuerzo cortante.

(c) El giro de torsión por unidad de longitud es igual a:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{\overline{CG}\cdot T_y}{GI_t} = \frac{\overline{CG}\cdot px}{GI_t} \text{ rad/m}$$

donde $\overline{CG} = 9,606 \cdot 10^{-2}$ m, $p = 5$ kN/m y $GI_t = 127\,232$ N·m^2. Por tanto, el valor del giro de torsión que sufre el extremo del voladizo es igual a:

$$\phi_x = \int_l \theta\, dx = \frac{\overline{CG}\ p}{GI_t}\int_o^l x\, dx = \frac{\overline{CG}\ pl^2}{2GI_t} = 0,189 \text{ rad} = 10,81^\circ$$

Como puede observarse el valor del giro de torsión en el extremo del voladizo es muy elevado, y queda fuera de las hipótesis de pequeños movimientos. La sección debería redefinirse para limitar el giro por torsión.

7.3.6 Analogía hidrodinámica

Además de la analogía de la membrana, existen otros problemas clásicos con ecuaciones de gobierno análogas a la del problema de torsión uniforme. Así, por ejemplo, la analogía hidrodinámica (A. G. Greenhill, 1910) establece una relación entre el problema

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

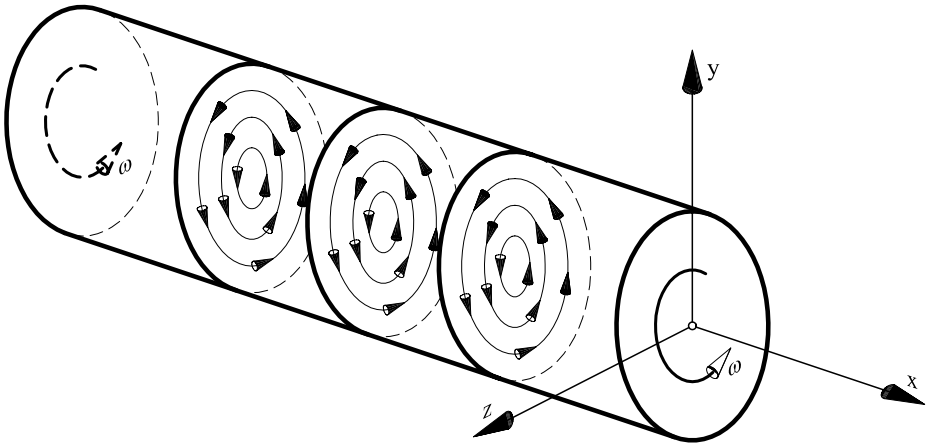

Fig. 7.18: Analogía hidrodinámica

mecánico de torsión de Saint-Venant de una sección y el problema hidrodinámico *plano* de movimiento de un fluido incompresible no viscoso en un tubo de idéntica sección y de longitud indefinida (ver Figura 7.18). Greenhill señaló que la función de tensión del problema de torsión es matemáticamente análoga a la *función de corriente* del problema hidrodinámico.

En efecto, la ecuación de continuidad para un fluido *incompresible* con flujo en el plano yz es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{7.42}$$

Por tanto, siempre existe una función escalar $\phi = \phi(y, z)$ tal que:

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad ; \qquad v_z = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

y que satisface la ecuación de continuidad idénticamente. Dicha función recibe el nombre de *función de corriente*, ya que es fácil demostrar que las curvas $\phi(y, z) = cte$ son precisamente las líneas de corriente del flujo.

Si el flujo es *no viscoso*, la vorticidad $\vec{\omega}$ es *constante* y se puede escribir:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} = -\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \vec{i} = \omega \vec{i} \tag{7.43}$$

donde $\vec{i}$ es un vector unitario en la dirección del eje longitudinal del tubo. Por tanto, se puede identificar:

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\omega \tag{7.44}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Esta ecuación es, obviamente, análoga a la que define a la *función de tensión* de Prandtl en el problema de torsión uniforme. De dicha analogía se deduce que en un punto dado la velocidad del fluido y la tensión tangencial tienen la misma dirección y valores proporcionales. Por tanto, las líneas de corriente del problema hidrodinámico son idénticas a las trayectorias de tensión del problema de torsión. En particular, como la velocidad en los puntos del contorno es tangente a éste, lo mismo ocurre con las tensiones tangenciales. Además, si el contorno del dominio tiene ángulos convexos en ellos la velocidad es nula y, por consiguiente, la tensión también lo es. Esto concuerda con cuantos resultados hemos obtenido con la analogía de la membrana (ver Figuras 7.18 y 7.10).

7.3.7 Secciones cerradas de pequeño espesor

Sea una rebanada de una pieza de sección cerrada de pequeño espesor sometida a torsión uniforme y consideremos el equilibrio de un elemento diferencial como el de la Figura 7.19. Por ser el espesor pequeño y según nos sugiere la analogía hidrodinámica para este caso, admitiremos que la distribución de tensiones tangenciales (velocidades) a través del espesor es uniforme. Nótese la diferencia sustancial de esta hipótesis respecto de la distribución de tensiones tangenciales supuesta a través del espesor en perfiles abiertos.

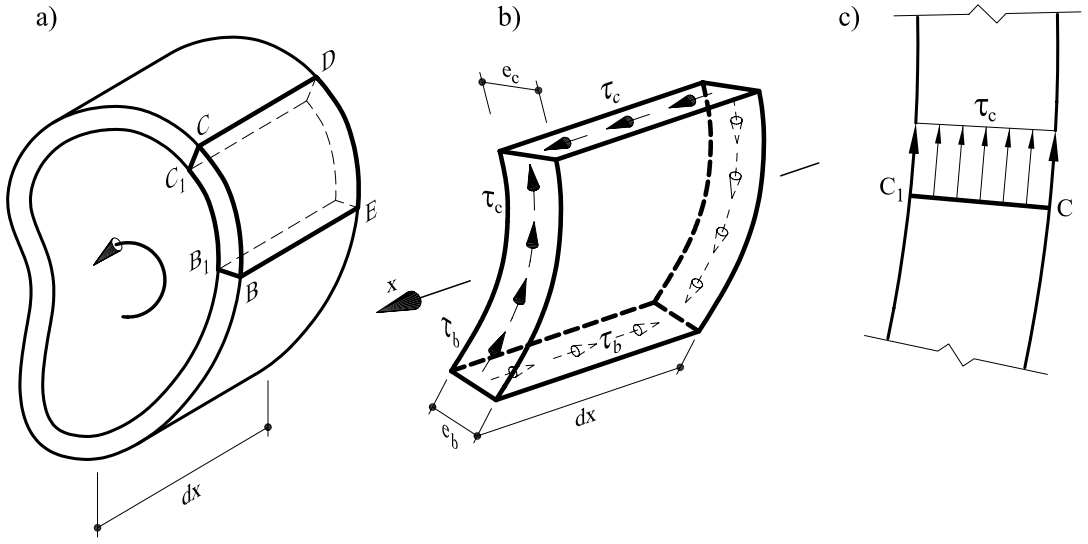

Fig. 7.19: Sección cerrada de pequeño espesor

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Por equilibrio de fuerzas según la dirección del eje x, debe ser:

$$\tau_b\, e_b\, dx - \tau_c\, e_c\, dx = 0 \tag{7.45}$$

donde e es el espesor en un punto dado de la sección. De la expresión anterior, se deduce que:

$$\tau_b\, e_b = \tau_c\, e_c = q = cte \tag{7.46}$$

Lo que significa que *el flujo de tensiones tangenciales es constante a través del espesor, $q = \tau\, e$ (hipótesis de Bredt).* La misma conclusión se extrae de la analogía hidrodinámica por continuidad (conservación) de flujo.

Para hallar la tensión sobre cada corte de la sección se establece la igualdad entre el momento resultante de las tensiones y el momento torsor actuante, respecto de un punto interior O cualquiera. Se tiene:

$$M_t = \int_S r\,\tau\, dS = \oint_s r\,\tau\, e ds = \oint_s qr\, ds = q \oint_s r ds = q \oint_{S_m} 2\, dS_m = 2\, qS_m \tag{7.47}$$

donde r es la distancia al punto O (arbitrario) de la tangente en un punto dado de la línea media, s es la longitud de arco medida sobre la línea media, y S_m es la superficie encerrada por la línea media de la sección.

Por tanto, el flujo de tensiones q es igual a:

$$q = \tau\, e = \frac{M_t}{2S_m} \tag{7.48}$$

Esta expresión se conoce como *primera fórmula de Bredt.*

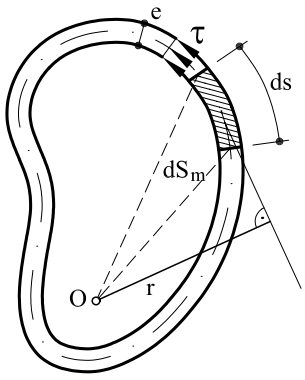

Fig. 7.20: Área encerrada por la línea media

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Por consideraciones energéticas, se puede deducir que en secciones cerradas de pequeño espesor el giro de torsión por unidad de longitud, θ, es:

$$\theta = \frac{1}{2GS_m} \oint_s \frac{q}{e}\, ds \tag{7.49}$$

y al sustituir $\tau = q/e = M_t/\left(2S_m e\right)$, se tiene:

$$\theta = \frac{M_t}{G\,4\,S_m^2 \,/ \oint_s \dfrac{ds}{e}} = \frac{M_t}{GI_t} \tag{7.50}$$

ecuación que se conoce como *segunda fórmula de Bredt*, y de la que se obtiene el valor de la inercia a torsión en este tipo de sección:

$$I_t = \frac{4\,S_m^2}{\oint_s \dfrac{ds}{e}} \tag{7.51}$$

Las consideraciones que permiten deducir la expresión (7.48) son puramente estáticas y, por consiguiente, válidas para secciones cerradas de pequeño espesor formadas por tramos de distintos materiales. Definiendo el coeficiente de equivalencia entre los distintos materiales como relación entre el módulo de rigidez transversal de cada material y el módulo de referencia, $n_i = G_i/\overline{G}$, la ecuación (7.50) se escribe como

$$\theta = \frac{M_t}{\overline{GI_t}} \tag{7.52}$$

con la inercia a torsión mecánica definida como

$$\overline{I_t} = \frac{4\,S_m^2}{\oint_s \dfrac{ds}{ne}} \tag{7.53}$$

Ejemplo 7.3.7.1

Calcular la inercia a torsión y el máximo momento torsor que puede resistir una pieza de sección anillo circular *cerrado* de radio r y de espesor e si la tensión tangencial admisible es τ^*.

La inercia a torsión de la sección cerrada vale (ver Ec. (7.51) y Ec. (7.18a)):

$$I_t = \frac{4S_m^2}{\oint \dfrac{ds}{e}} = \frac{4(\pi r^2)^2}{\dfrac{2\pi r}{e}} = 2\pi r^3 e = A\,r^2 = I_p$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

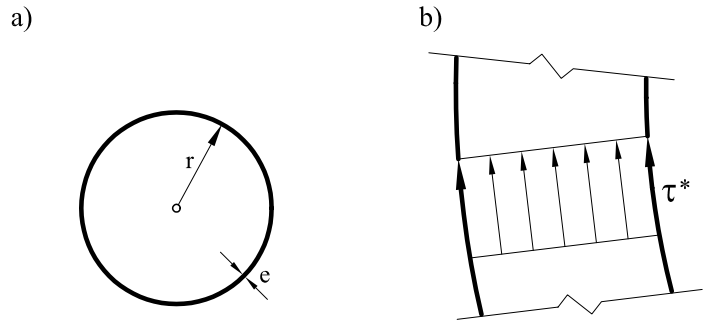

Fig. 7.21: Anillo circular cerrado

y comparando con la inercia a torsión de la misma sección abierta (ver Ejemplo 7.3.5.1) se tiene la relación:

$$\frac{(I_t)_{\text{ce}}}{(I_t)_{\text{ab}}} = \frac{Ar^2}{\frac{1}{3}Ae^2} = 3\left(\frac{r}{e}\right)^2$$

El momento torsor máximo es, según la ecuación (7.48):

$$M_t^{\max} = 2S_m\tau^* e = 2\pi r^2 e\,\tau^* = Ar\,\tau^*$$

y todos los puntos de la sección trabajan a tensión τ^*, al ser el espesor uniforme.

Si se compara este resultado con el obtenido en el Ejemplo 7.3.5.1 para la sección *abierta* de igual área se tiene una relación:

$$\frac{(M_t^{\max})_{\text{ce}}}{(M_t^{\max})_{\text{ab}}} = \frac{Ar\,\tau^*}{\frac{1}{3}Ae\,\tau^*} = 3\left(\frac{r}{e}\right)$$

Ambos resultados demuestran la superioridad de las secciones cerradas frente a las abiertas desde el punto de vista de la resistencia frente a la solicitación de torsión uniforme.

Ejemplo 7.3.7.2

Dimensionar la longitud a de la sección de la Figura 7.22, solicitada por un momento torsor $M_t = 150$ kN·m, sabiendo que la tensión tangencial admisible es $\tau^* = 100$ MPa. Calcular el ángulo de torsión por unidad de longitud si el módulo de rigidez transversal es $G = 100$ GPa.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

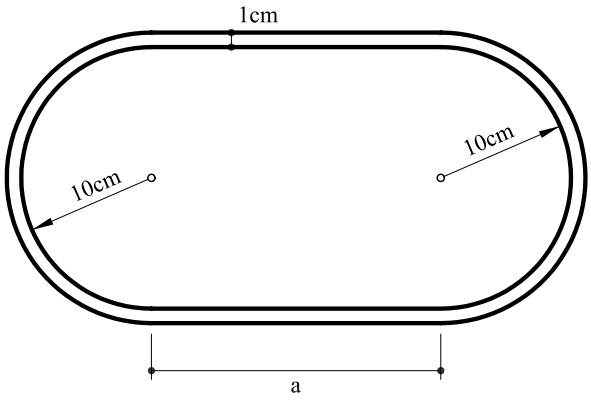

Fig. 7.22: Sección unicelular

El valor de la tensión tangencial es uniforme en toda la sección y vale:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{M_t}{2S_m e} \\ &= \frac{150 \cdot 10^3}{2\,(a \cdot 21,0 + \pi \cdot 10,5^2) \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}}\ \text{Pa} \\ &= \frac{1,5 \cdot 10^5}{42,0\,a + 692,72}\ \text{MPa}\end{aligned}$$

Haciendo $\tau < \tau^* = 100$ MPa se tiene $a > 19,22$ cm. La inercia a torsión de la sección para $a = 20$ cm vale:

$$\begin{aligned}I_t &= \frac{4S_m^2}{\oint \frac{ds}{e}} \\ &= \frac{4 \cdot \left(20,0 \cdot 21,0 + \pi \cdot 10.5^2\right)^2}{\frac{2 \cdot (20,0 + \pi \cdot 10,5)}{1,0}}\ \text{cm}^4 \\ &= 22.168,14\ \text{cm}^4\end{aligned}$$

Luego el ángulo de torsión por unidad de longitud vale:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{M_t}{GI_t} \\ &= \frac{150 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^9 \cdot 22.168,14 \cdot 10^{-8}}\ \text{rad/m} \\ &= 6,766 \cdot 10^{-3}\ \text{rad/m} \\ &= 0,387^o\ /\text{m}\end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

7.3.8 Secciones multicelulares

El caso de secciones multicelulares sometidas a tensión uniforme se puede estudiar como una extensión del caso unicelular ya descrito. Consideraremos en lo que sigue una sección bicelular, para generalizar luego los resultados al caso m-celular, con tramos de diversos materiales. Se supone siempre que los espesores son siempre pequeños respecto de las dimensiones transversales de la sección de forma que es aplicable la hipótesis de Bredt de conservación del flujo de tensiones tangenciales y la distribución uniforme de este flujo a través del espesor.

Sea la sección bicelular mostrada en la Figura 7.23a. Trataremos el flujo de tensiones tangenciales como se tratan las intensidades de corriente en la resolución de circuitos eléctricos. Así, llamaremos q_1 y q_2 a los flujos, de sentido supuesto antihorario, que circulan alrededor de las celulas 1 y 2, respectivamente. A lo largo de la pared de separación entre dos células el flujo q_{12} es igual a la suma algebraica de los flujos en las células adyacentes. En efecto, según la Figura 7.23b, el equilibrio de fuerzas según la dirección del eje x del nudo A exige que

$$-q_1\, dx + q_2\, dx + q_{12}\, dx = 0 \tag{7.54}$$

de donde

$$q_{12} = q_1 - q_2 \tag{7.55}$$

Para hallar el flujo alrededor de cada célula hay que plantear las correspondientes ecuaciones. Para ello se aplica la ecuación (7.49) a cada una de las células, imponiendo que el giro de torsión por unidad de longitud es idéntico para todas las células de la

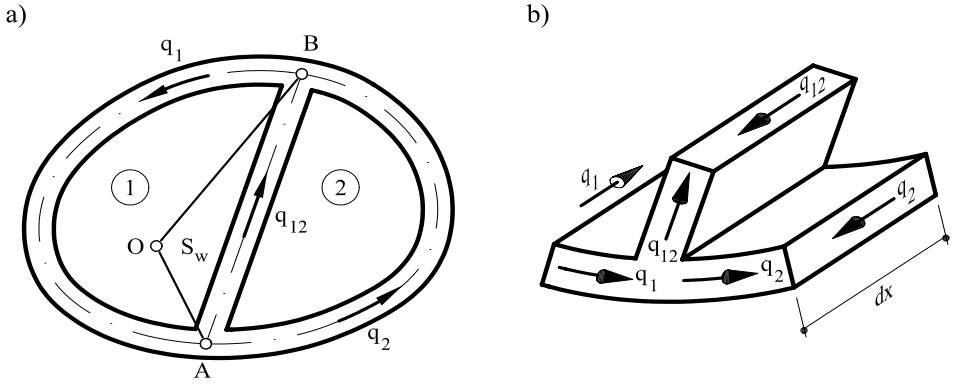

Fig. 7.23: Sección multicelular

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

sección; es decir,

$$2G\theta = \frac{1}{S_1}\oint_1 q_1 \frac{ds}{e} \tag{7.56a}$$

$$2G\theta = \frac{1}{S_2}\oint_2 q_2 \frac{ds}{e} \tag{7.56b}$$

donde S_1 y S_2 son las superficies encerradas por la líneas medias de las dos células y s es la longitud de arco medida sobre la línea media de las células.

Estas dos ecuaciones pueden resolverse para obtener los flujos q_1 y q_2 en función de θ. El valor de éste en función del momento torsor actuante se puede calcular imponiendo que el momento torsor que actúa sobre la sección sea igual al momento resultante de los flujos actuando sobre ella, respecto de un punto interior O cualquiera. Se tiene:

$$M_t = \int_S r\,\tau\,dS \tag{7.57a}$$

$$= \oint_s q\,r\,ds \tag{7.57b}$$

$$= \oint_1 q_1\,r\,ds + \oint_2 q_2\,r\,ds - \int_{12} q_{12}\,r\,ds \tag{7.57c}$$

$$= 2\,q_1\,(S_1 + S_w) + 2\,q_2\,(S_2 + S_w) - 2\,S_w\,(q_1 - S_2) \tag{7.57d}$$

$$= 2\,S_1 q_1 + 2\,S_2 q_2 \tag{7.57e}$$

donde r es la distancia al punto O (arbitrario) de la tangente en un punto dado de la línea media, y S_w es el área del triángulo OAB, tal como se indica en la Figura 7.23a.

En el caso de una sección m-celular, formada por tramos de distintos materiales, se puede plantear un sistema de m ecuaciones de la forma

$$2\overline{G}\theta = \frac{1}{S_i}\oint_i q_i \frac{ds}{ne} \tag{7.58}$$

donde $\overline{G}$ es el módulo de rigidez transversal de referencia y n es el coeficiente de equivalencia del material correspondiente. La resolución de este sistema permite obtener los flujos alrededor de las m células en función del ángulo específico θ. Éste puede obtenerse a partir de la ecuación de equilibrio interno

$$M_t = 2\sum_{i=1}^{n} S_i\,q_i \tag{7.59}$$

En el caso de que la sección presente simetría respecto a uno o varios ejes, esta característica puede ser aprovechada para simplificar los cálculos necesarios. Así, por ejemplo, en la sección de la Figura 7.24a el flujo q alrededor de las cuatro células es

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

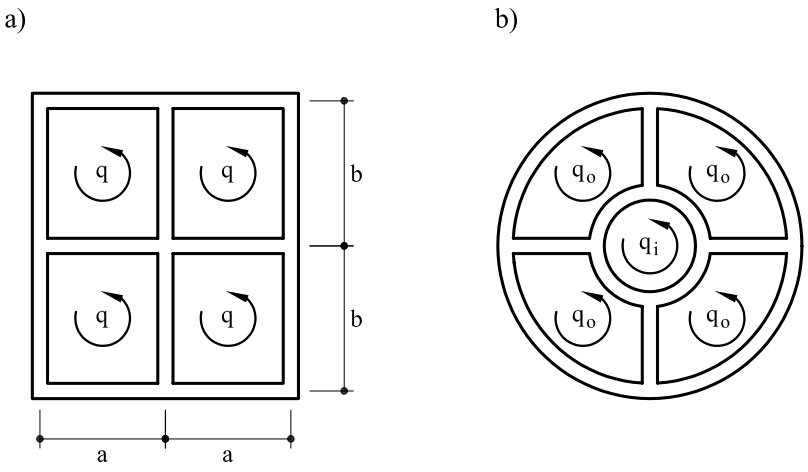

Fig. 7.24: Secciones multicelulares con simetría

idéntico. En la Figura 7.24b sólo es necesario considerar el flujo en las cuatro células exteriores q_o y el flujo en la célula interior q_i.

Ejemplo 7.3.8.1

Calcular las tensiones tangenciales actuantes en la sección de la Figura 7.25a cuando actúa sobre ella un torsor uniforme de sentido antihorario de valor $M_t = 5$ kN·m (las cotas están medidas en mm, entre líneas medias). Calcular el ángulo de torsión por unidad de longitud si el módulo de rigidez transversal es $G = 100$ GPa.

Llamaremos q_1, q_2 y q_3 a los flujos en las tres células que componen la sección. El sistema de ecuaciones que permite calcularlos se obtiene planteando la ecuación (7.58) para cada una de las células. Así:

$$\begin{aligned}
2G\theta &= \frac{1}{100\cdot 50}\left[\frac{50+100+50}{5}\,q_1 + \frac{50}{4}\,(q_1-q_2) + \frac{50}{4}\,(q_1-q_3)\right] \\
2G\theta &= \frac{1}{50\cdot 50}\left[\frac{50+50}{5}\,q_2 + \frac{50}{4}\,(q_2-q_3) + \frac{50}{4}\,(q_2-q_1)\right] \\
2G\theta &= \frac{1}{50\cdot 50}\left[\frac{50+50}{5}\,q_3 + \frac{50}{4}\,(q_3-q_2) + \frac{50}{4}\,(q_3-q_1)\right]
\end{aligned}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

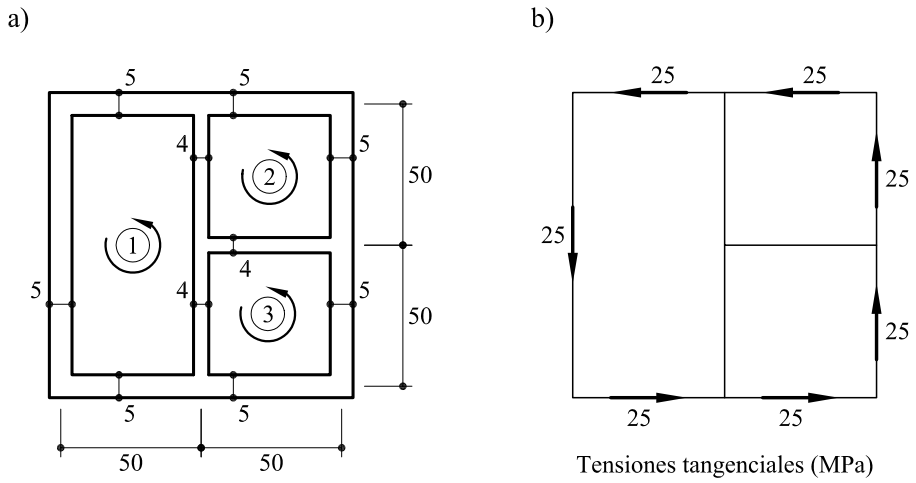

Fig. 7.25: Sección multicelular del Ejemplo 7.3.8.1

De la segunda y tercera ecuaciones se deduce que $q_2 = q_3$, resultado que puede intuirse por simetría de las células 2 y 3. Entonces, la barra interior horizontal no trabaja y , por tanto, también es $q_1 = q_2 = q_3$, y la barra interior vertical tampoco trabaja. La sección se comporta como si fuera unicelular, con

$$q = q_1 = q_2 = q_3 = \frac{100 \cdot 50}{40} \, (2G\theta) = 250\, G\theta \tag{a}$$

Por otro lado, aplicando la ecuación (7.58):

$$M_t = 2 \cdot (100 \cdot 50 + 50 \cdot 50 + 50 \cdot 50) \, q$$

de donde

$$q = \frac{M_t}{2(100 \cdot 100)} \tag{b}$$

Usando los resultados (a) y (b) y sustituyendo los datos del enunciado se tiene:

$$q = \frac{M_t}{2\sum S_i} = \frac{5 \cdot 10^3}{2(100 \cdot 100) \cdot 10^{-6}} \text{ N/m} = 250 \text{ kN/m}$$

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} = \frac{5 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \text{ rad/m} = 0,01 \text{ rad/m}$$

La tensión tangencial es uniforme sobre las paredes exteriores de la sección (ver Figura 7.25b) y vale

$$\tau = \frac{q}{e} = \frac{250 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-3}} \text{ Pa} = 25 \text{ MPa}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

7.4 Torsión no uniforme

En la teoría de Saint-Venant de torsión uniforme se supone que tanto el giro de torsión por unidad de longitud como el alabeo son uniformes a lo largo de la pieza. Obviamente, el suponer que el alabeo es uniforme para todas las secciones simplifica el planteamiento del problema, pero es una hipótesis que puede no darse en la práctica con mucha frecuencia. Así, por ejemplo, es frecuente que una pieza sometida a torsión pura tenga alguna sección transversal con el alabeo impedido. Tal suele ser el caso de las secciones de empotramiento, que no pueden alabearse durante la torsión. Por otro lado, en casos de torsión simple, esto es, variable a lo largo de la pieza, el alabeo será tanto mayor cuanto mayor sea el torsor que actúa sobre cada sección y, por lo tanto, el alabeo relativo entre secciones no será, en general, despreciable. La influencia que el alabeo no uniforme tiene en el comportamiento resulta despreciable en secciones macizas o en secciones celulares, pero puede ser importante cuando las secciones rectas son abiertas y de pequeño espesor.

Consideremos el voladizo de la Figura 7.26a, sometido a torsión pura por la acción de un momento torsor M_t aplicado en su extremo libre. La sección es una doble T simétrica de canto h y ancho b, con espesor uniforme e en las alas y el alma.

Supongamos que el empotramiento es tal que impide el alabeo de la sección de empotramiento, en $x = 0$. Si la longitud de la viga, l, es suficientemente larga, esta restricción al alabeo no afectará prácticamente a la sección del extremo, en $x = l$, y ésta estará sometida a tensiones de Saint-Venant, con una distribución como la que se muestra en la Figura 7.26c. El valor máximo de estas tensiones es

$$\tau_{\max}\,(x = l) = G\,\theta\,e = \frac{M_t\,e}{I_t} \tag{7.60}$$

donde $I_t = (2b + h)\ e^3/3$ es la inercia a torsión de la sección. De acuerdo con la teoría de Saint-Venant no actúan tensiones normales sobre esta sección.

Por otro lado, las tensiones de Saint-Venant son nulas en la sección de empotramiento, ya que el alabeo debe ser libre para que éstas se desarrollen, y en esa sección el alabeo está totalmente impedido. La naturaleza de las tensiones tangenciales que aparecen en la sección de empotramiento se comprende si se sustituye (ver Figura 7.27a) el momento torsor por un par de fuerzas horizontales F actuando sobre las alas de la sección extrema tales que $F = M_t/h$, de tal forma que el sistema de fuerzas resultante sea estáticamente equivalente al momento torsor actuante. Si despreciamos la rigidez del alma, se puede considerar que las dos alas trabajan independientemente, estando sometidas a flexión simple alrededor del eje y. En la sección de empotramiento esta flexión produce *sobre cada una de las alas*, por un lado, unas tensiones tangenciales

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

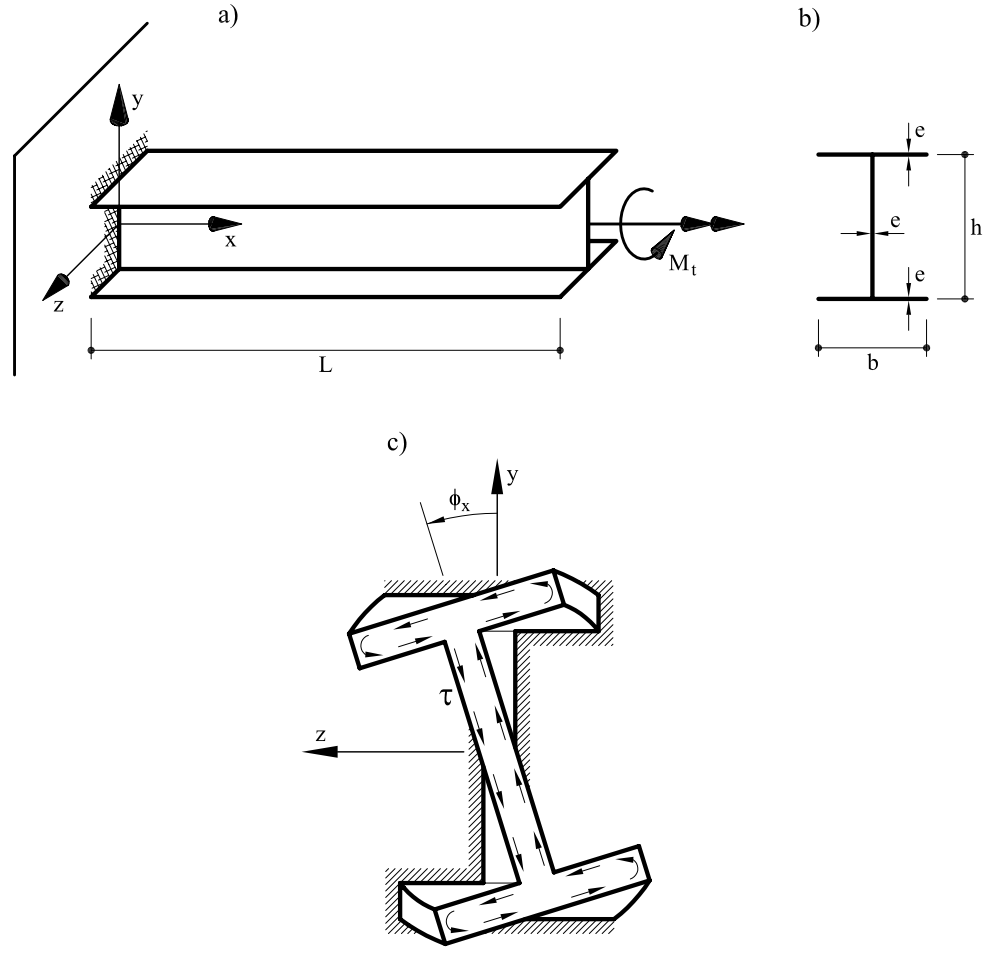

Fig. 7.26: Torsión sobre un voladizo de sección abierta en doble T. Tensiones sobre la sección extrema

debidas a la acción de un cortante $T_z = F$, tales como las mostradas en la Figura 7.27c y cuyo valor máximo es

$$\tau_{\max}\,(x=0) = \frac{3}{2}\frac{F}{be} = \frac{3}{2}\frac{M_t}{hbe} \tag{7.61}$$

y, por otro, unas tensiones normales debidas a un momento flector $M_y = Fl$, tales como las mostradas en la Figura 7.27d y cuyo valor máximo es

$$(\sigma_x)_{\max}\,(x=0) = \frac{M_y b/2}{eb^3/12} = \frac{6\,M_t\,l}{hb^2 e} \tag{7.62}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

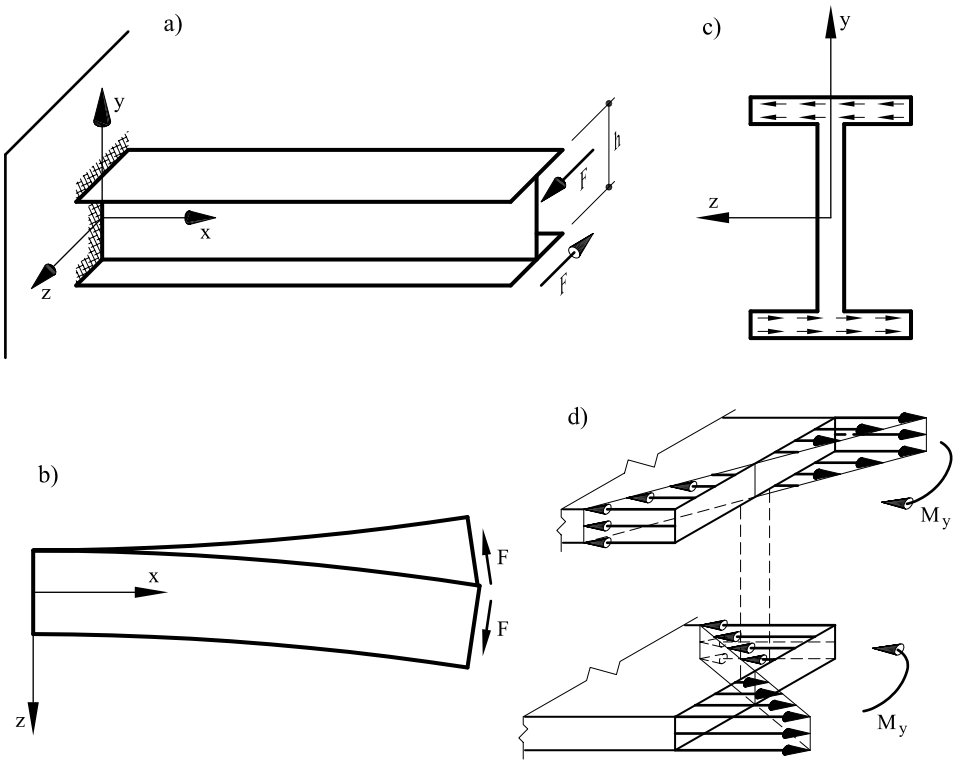

Fig. 7.27: Torsión sobre un voladizo de sección abierta en doble T. Tensiones sobre la sección de empotramiento

Obsérvese que tanto la fuerza resultante neta como el momento flector total de estas tensiones tangenciales y normales es nula sobre la sección total (las dos alas). Al par de momentos flectores sobre las alas, iguales y opuestos, se le llama *bimomento*.

Por lo tanto, en función de la hipótesis de deformación adoptada, es posible definir dos distribuciones de tensiones totalmente diferentes que, sin embargo, son estáticamente equivalentes, ya que ambos tienen resultante nula y momento resultante igual al momento torsor actuante. Puede decirse que, sin violar las condiciones de equilibrio, pueden definirse dos mecanismos resistentes totalmente diferentes para el momento torsor:

- uno debido a la torsión sin restricción del alabeo, al que llamaremos *momento de Saint-Venant*, M_v, y
- uno debido a la restricción al alabeo, al que llamaremos *momento de alabeo (impedido)*, M_w.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

En secciones intermedias, para $0 < x < l$, el grado de restricción al alabeo varía desde ser total a nulo y, por lo tanto, los dos mecanismos resistentes descritos participan en mayor o menor grado, y ambos modelos de distribución de tensiones coexisten y se superponen en una proporción relativa que depende de x. Se puede escribir que, en una sección dada, el momento torsor actuante se reparte en un momento de Saint-Venant y un momento de alabeo:

$$M_t = M_v(x) + M_w(x) \tag{7.63}$$

Nótese que estos resultados contradicen claramente el principio de Saint-Venant, ya que las tensiones sobre dos secciones distintas del voladizo (por ejemplo, sobre las dos secciones extremas) son diferentes a pesar de que el momento torsor es constante a lo largo de la pieza; es decir, las tensiones que actúan sobre una sección no dependen sólo del valor de los esfuerzos actuantes sobre ella, sino también de la posición de ésta en la pieza.

Desgraciadamente, ocurre que el efecto de la restricción al alabeo se extiende a longitudes sorprendentemente grandes frente a las dimensiones transversales de la pieza para secciones abiertas de pequeño espesor, produciendo variaciones significativas en las distribuciones de tensiones tangenciales y normales. Esto implica que, para calcular de forma satisfactoria las tensiones que actúan realmente sobre piezas de estas características sometidas a torsión, es necesario disponer de algún procedimiento para distinguir, en cada sección de la pieza, las fracciones del momento torsor correspondientes a cada mecanismo resistente. Esto sólo puede conseguirse a partir de la consideración expresa de las deformaciones asociadas a cada uno de ellos.

Así, por ejemplo, en el voladizo del que nos ocupamos, el momento de Saint-Venant es proporcional al giro de torsión por unidad de longitud, o sea:

$$M_v(x) = GI_t\,\theta(x) \tag{7.64}$$

Por otra parte, en una sección sometida a torsor de alabeo, el giro de torsión se puede relacionar con el desplazamiento lateral de las alas w (ver Figura 7.28), en la forma

$$\phi_x = \frac{w}{h/2} \tag{7.65}$$

y éste se relaciona con el momento flector de la forma (ver Capítulo 2 del Libro 2):

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_y^{\text{ala}}} \tag{7.66}$$

donde $I_y^{\text{ala}} = b^3e/12$. Por tanto:

$$M_y = EI_y^{\text{ala}}\frac{d^2w}{dx^2} = EI_y^{\text{ala}}\frac{h}{2}\frac{d^2\phi_x}{dx^2} = EI_y^{\text{ala}}\frac{h}{2}\frac{d\theta}{dx} \tag{7.67}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

ya que $\theta = d\phi_x/dx$. Por último, se tiene que

$$M_w(x) = Fh = h\frac{dM_y}{dx} \tag{7.68}$$

ya que las fuerzas F son el "cortante" debido a la variación del "flector" M_y. Sustituyendo la relación (7.67) en la ecuación (7.68) se tiene finalmente que:

$$M_w(x) = \frac{EI_y^{\text{ala}}h^2}{2}\frac{d^2\theta}{dx^2} = EI_w\frac{d^2\theta}{dx^2} \tag{7.69}$$

donde $I_w = b^3h^2e/24$ se llama *inercia de alabeo* y el producto EI_w se llama *rigidez de alabeo*. Sustituyendo las relaciones (7.64) y (7.69) en la ecuación (7.63) se tiene:

$$EI_w\frac{d^2\theta}{dx^2} + GI_t\theta = M_t \tag{7.70}$$

que es una ecuación diferencial que debe resolverse con las condiciones de contorno adecuadas a cada caso para obtener $\theta = \theta(x)$, el giro de torsión por unidad de longitud a lo largo de la pieza. Una vez obtenida éste, las ecuaciones (7.64) y (7.69) proporcionan la información necesaria sobre la forma en que ambos mecanismos de torsión se distribuyen a lo largo de la pieza. El valor del parámetro adimensional

$$\kappa = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{EI_w}{GI_t}} \tag{7.71}$$

proporciona una idea de la importancia relativa entre la torsión de alabeo y la de Saint-Venant. Valores pequeños de κ corresponden a situaciones de torsión uniforme

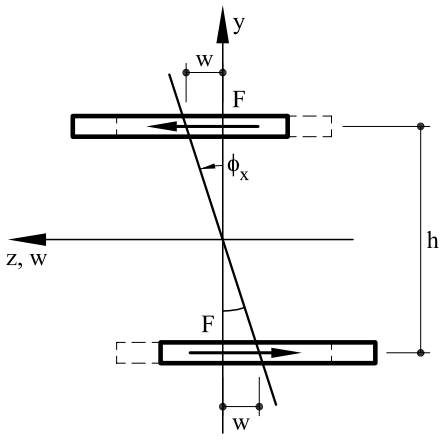

Fig. 7.28: Ángulo de torsión en torsión no uniforme

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

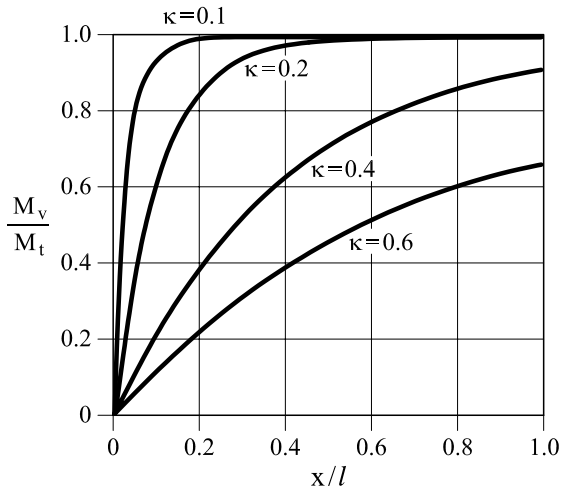

Fig. 7.29: Relación entre el momento torsor de Saint-Venant y el momento torsor total a lo largo de la pieza para varios valores de la relación entre la inercia de alabeo y la de torsión

dominante y viceversa. La Figura 7.29 representa la variación cualitativa de la relación M_v/M_t, en función de la posición de la sección en un voladizo sometido a momento torsor constante, para diversos valores de κ. Puede observarse que sólo para valores muy pequeños de la rigidez de alabeo se puede considerar que la restricción del empotramiento es un efecto local. En perfiles abiertos de pequeño espesor κ es proporcional a la relación (hb/el) y, por lo tanto, sólo es suficientemente pequeño en piezas muy esbeltas.

El método de análisis que permite obtener expresiones prácticas para calcular el valor de las tensiones y el giro de torsión por unidad de longitud, en situaciones generales de torsión no uniforme, es complejo y no se tratará aquí. El lector interesado puede encontrarlo en diversos textos especializados de la bibliografía.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

A Características Geométricas de la Sección

A.1 Secciones homogéneas

A.1.1 Momento estático axial de una sección

Definición

Sea S una sección contenida en un plano sobre el que se sitúan unos ejes cartesianos dextrógiros (y, z), tal como se muestra en la Figura A.1. Se definen como *momentos estáticos* de la sección respecto a los ejes (y, z) las integrales:

$$m_y = \int_S z\, dS \qquad ; \qquad m_z = \int_S y\, dS \tag{A.1}$$

donde dS es un elemento diferencial de área e (y, z) son las distancias de éste a los ejes coordenados.

El momento estático de una sección respecto a un eje puede ser positivo, negativo o nulo, dependiendo de la posición y orientación de la sección respecto a éste. Las dimensiones del momento estático son $\left[L^3\right]$; por tanto, en el SI se miden en m^3.

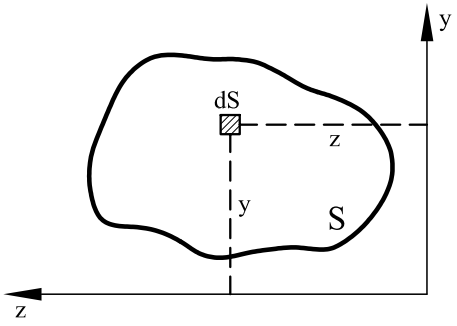

Fig. A.1: Momentos estáticos axiales de una sección

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

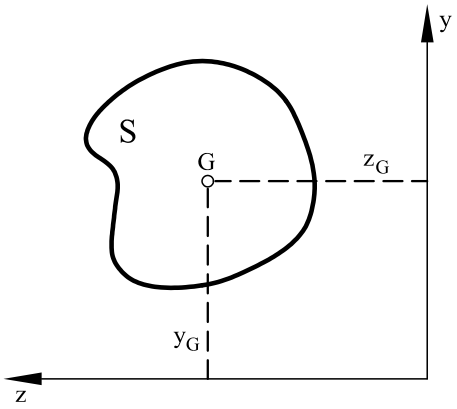

Fig. A.2: Baricentro de una sección

Centro de gravedad

Se define como *centro de gravedad* o *baricentro* de la sección S al punto G de coordenadas (y_G, z_G) que satisface las relaciones:

$$y_G = \frac{\int_S y\, dS}{\int_S dS} \qquad ; \qquad z_G = \frac{\int_S z\, dS}{\int_S dS} \tag{A.2}$$

De las ecuaciones (A.1) y (A.2) se deduce que los momentos estáticos de la sección S con respecto a los ejes (y, z) se pueden expresar también en la forma

$$m_y = z_G\, A \qquad ; \qquad m_z = y_G\, A \tag{A.3}$$

donde $A = \int_S dS$ es el área de la sección. Asimismo, se deduce de estas ecuaciones que el momento estático de una sección respecto a un eje es nulo si y sólo si dicho eje pasa por el baricentro de la sección.

Es fácil observar que si la sección S tiene un eje de simetría, el momento estático con respecto a dicho eje es cero. En efecto, tal como se muestra en la Figura A.3, para una sección en la que el eje y sea eje de simetría, por cada elemento dS con abscisa z positiva existe otro elemento idéntico dS' con abscisa z negativa, luego $m_y = 0$. En consecuencia, de las ecuaciones (A.2), $z_G = 0$, es decir, el centro de gravedad de la sección está situado sobre el eje de simetría.

Siguiendo el mismo procedimiento se demuestra también que si la sección tiene dos ejes de simetría, el baricentro coincide con el punto de intersección de los mismos. Teniendo en cuenta lo anterior es posible determinar con facilidad el centro de gravedad de algunas secciones, por ejemplo:

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

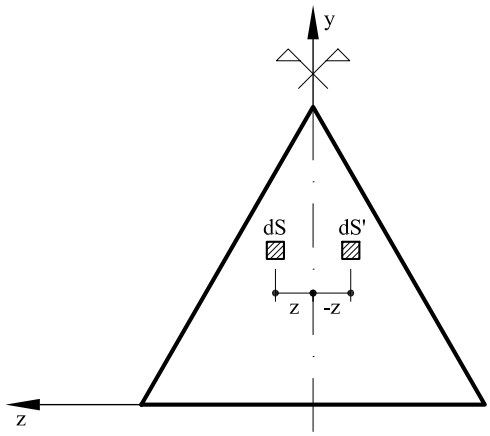

Fig. A.3: Sección con un eje de simetría

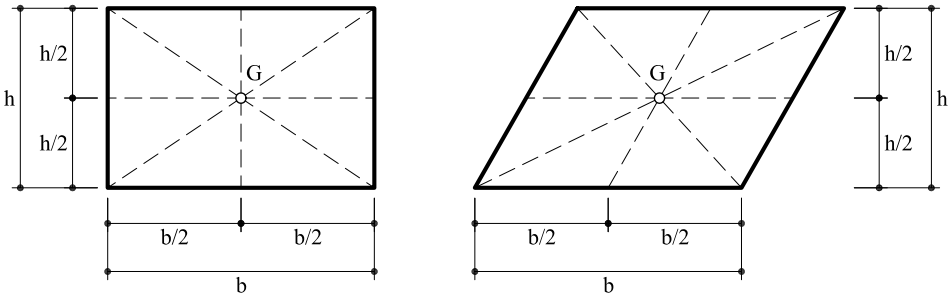

Fig. A.4: Baricentro: rectángulo y paralelogramo

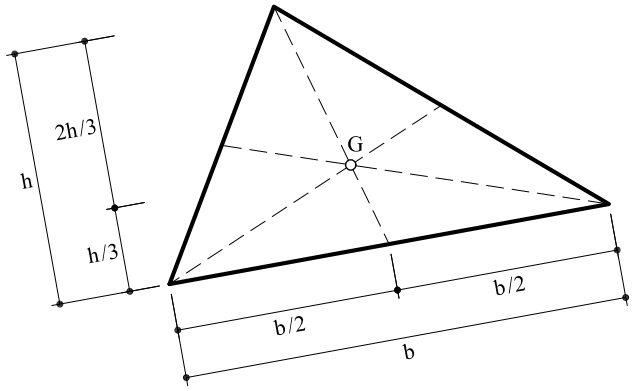

Fig. A.5: Baricentro de un triángulo

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

- *rectángulo o paralelogramo*: el baricentro coincide con el punto de intersección de las medianas o de las diagonales (ver Figura A.4). En este caso cada una de ellas es eje de simetría de la sección, y por tanto, el momento estático de la sección respecto a ellas es nulo.

- *triángulo*: el baricentro está situado en el punto de intersección de las tres medianas (Figura A.5). Las medianas no son ejes de simetría, pero puede decirse que el área se dispone "simétricamente" a uno y otro lado.

A.1.2 Momentos de inercia de una sección

Momento de inercia axial y radio de giro

Sea S una sección contenida en un plano sobre el que se sitúan unos ejes cartesianos dextrogiros (y, z). Se definen como *momentos de inercia* de la sección respecto a los ejes las integrales:

$$I_y = \int_S z^2 \, dS \qquad ; \qquad I_z = \int_S y^2 \, dS \tag{A.4}$$

donde dS es un elemento diferencial de área e (y, z) son las distancias de éste a los ejes coordenados.

El momento de inercia de una sección respecto a un eje es siempre positivo. Las dimensiones de los momentos de inercia son $\left[L^4\right]$; por tanto, en el SI se miden en m^4.

Se denomina *radio de giro de la sección con respecto a un eje* a la raíz cuadrada de la relación entre el momento de inercia y el área de la sección. Para los ejes (y, z) puede escribirse, respectivamente:

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} \qquad ; \qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} \tag{A.5}$$

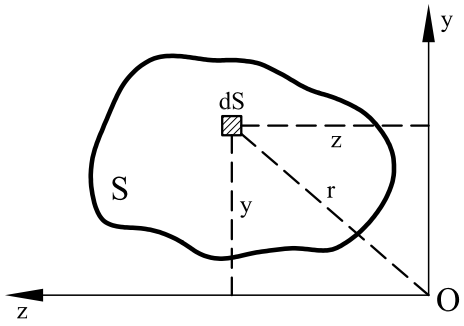

Fig. A.6: Momentos de inercia de una sección

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Momento de inercia polar

Sea S una sección contenida en un plano y O un punto de dicho plano (Figura A.6). Se define el momento de inercia polar I_O de la sección S respecto al punto O como la integral

$$I_o = \int_S \rho^2 \, dS \tag{A.6}$$

donde dS es un elemento diferencial de área y ρ es su distancia al punto O.

Al igual que el momento de inercia axial, el momento polar es siempre positivo y sus dimensiones son $[L^4]$.

Si se trazan dos ejes ortogonales que pasen por el punto O (Figura A.6) y se miden las distancias y, z de un diferencial de área dS a dichos ejes, se puede escribir:

$$\rho^2 = y^2 + z^2 \tag{A.7}$$

y, por tanto:

$$\begin{aligned} I_o &= \int_S \rho^2 \, dS && \text{(A.8a)} \\ &= \int_S (y^2 + z^2) \, dS && \text{(A.8b)} \\ &= \int_S y^2 \, dS + \int_S z^2 \, dS && \text{(A.8c)} \\ &= I_z + I_y && \text{(A.8d)} \end{aligned}$$

De la expresión anterior se deduce que el momento de inercia polar respecto al punto O es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes ortogonales que pasen por dicho punto.

De la propiedad anterior también se concluye que la suma de momentos de inercia axiales es un invariante para cualquier par de ejes ortogonales que pasen por el mismo punto.

Producto de inercia

Se define el *producto de inercia* de la superficie S respecto a los ejes (y, z) como la integral

$$I_{yz} = \int_S y \, z \, dS \tag{A.9}$$

El producto de inercia de una sección puede ser positivo, negativo o nulo. Sus dimensiones son $[L^4]$.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

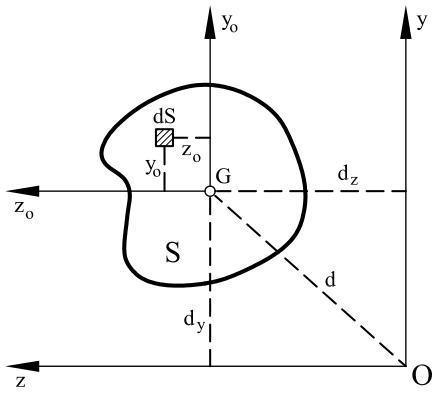

Fig. A.7: Traslación de ejes de referencia

Si una sección S tiene un eje de simetría, el producto de inercia de la sección respecto a dicho eje y a otro eje perpendicular a éste es nulo. En efecto, en la Figura A.3 se muestra una sección simétrica respecto al eje vertical y; se observa que a cada elemento diferencial de área dS con abscisa z positiva, le corresponde, por simetría, otro elemento idéntico con abscisa z negativa, cuya ordenada y tiene el mismo valor y signo, luego los productos de inercia de estos elementos diferenciales se anulan.

A.1.3 Traslación de ejes de referencia

Momento de inercia axial

Sea z_o un eje baricéntrico de la sección S y sea z un eje paralelo a éste a una distancia d_y del anterior (Figura A.7). El momento de inercia I_z puede calcularse como

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S y^2 \, dS && \text{(A.10a)} \\ &= \int_S (y_o + d_y)^2 \, dS && \text{(A.10b)} \\ &= \int_S y_o^2 \, dS + 2d_y \int_S y_o \, dS + d_y^2 \int_S dS && \text{(A.10c)} \\ &= I_{z_o} + d_y^2 A && \text{(A.10d)} \end{aligned}$$

donde la segunda integral de la ecuación (A.10c) es nula por ser z_o un eje baricéntrico. Por tanto, *el momento de inercia de una sección respecto a un eje arbitrario es igual a la suma del momento de inercia respecto al eje baricéntrico paralelo al eje anterior más el área de la sección multiplicada por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes*

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

(Teorema de Steiner).

$$I_z = I_{z_o} + d_y^2\, A \tag{A.11}$$

Dividiendo esta ecuación por el área de la sección se tiene:

$$r_z^2 = r_{z_o}^2 + d_y^2 \tag{A.12}$$

Esta expresión permite conocer el radio de inercia de la sección respecto a un eje en función del radio de inercia respecto a un eje baricéntrico paralelo.

Momento de inercia polar

Sean I_y e I_z los momentos de inercia de una sección respecto a dos ejes que se cortan en el punto O, y sea $I_{_O}$ el momento de inercia polar de la sección respecto a dicho punto. Si se consideran dos ejes baricéntricos (y_o, z_o) paralelos a los anteriores (ver Figura A.7), y se aplica el Teorema de Steiner, se obtiene:

$$\begin{aligned} I_{_O} &= I_y + I_z && \text{(A.13a)} \\ &= I_{y_o} + d_z^2\, A + I_{z_o} + d_y^2\, A && \text{(A.13b)} \\ &= I_{_G} + d^2\, A && \text{(A.13c)} \end{aligned}$$

La ecuaciones anteriores permiten obtener el momento de inercia polar de una sección respecto a un punto cualquiera O, a partir del momento de inercia polar de la sección respecto al baricentro G y la distancia entre ambos puntos.

Producto de inercia

De igual manera, si se conoce el producto de inercia de una sección respecto a unos ejes ortogonales (y_o, z_o) baricéntricos, y se desea obtener el valor del producto de inercia respecto a unos ejes coordenados (y, z), paralelos a los anteriores y situados a distancias d_y, d_z de los ejes baricéntricos (ver Figura A.7), se tiene que

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \int_S y\, z\, dS && \text{(A.14a)} \\ &= \int_S (y_o + d_y)\, (z_o + d_z)\, dS && \text{(A.14b)} \\ &= \int_S y_o\, z_o\, dS + d_y \int_S z_o\, dS + d_z \int_S y_o\, dS + d_y\, d_z \int_S dS && \text{(A.14c)} \\ &= I_{y_o\, z_o} + d_y\, d_z\, A && \text{(A.14d)} \end{aligned}$$

donde se ha sustituido $y = y_o + d_y$, $z = z_o + d_z$. Los sumandos segundo y tercero de la ecuación (A.14c) son nulos por ser los momentos estáticos de la sección respecto a dos ejes baricéntricos.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

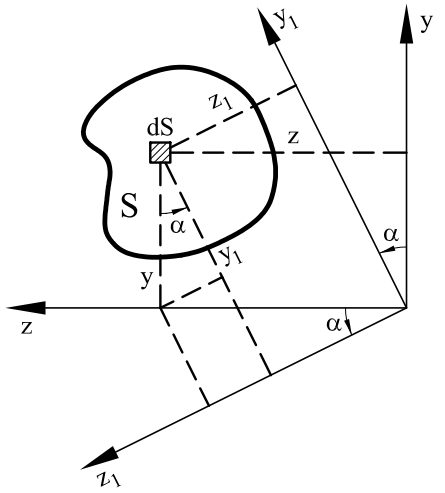

Fig. A.8: Rotación de ejes de referencia

A.1.4 Rotación de ejes de referencia

Sean $(y,\, z)$ e $(y_1,\, z_1)$ dos sistemas de ejes coordenados que forman entre sí un ángulo α, tal como se muestra en la Figura A.8. Las coordenadas en el sistema $(y_1,\, z_1)$ pueden expresarse en función de las coordenadas en el sistema $(y,\, z)$ en la forma:

$$y_1 = y\cos\alpha + z\sin\alpha \tag{A.15a}$$
$$z_1 = -y\sin\alpha + z\cos\alpha \tag{A.15b}$$

Utilizando estas expresiones, el momento de inercia de la sección respecto al eje y_1 se puede evaluar como:

$$I_{y_1} = \int_S z_1^2\, dS \tag{A.16a}$$
$$= \int_S (-y\sin\alpha + z\,\cos\alpha)^2\, dS \tag{A.16b}$$
$$= \int_S y^2\,\sin^2\alpha\, dS - \int_S yz\, 2\sin\alpha\cos\alpha\, dS + \int_S z^2\,\cos^2\alpha\, dS \tag{A.16c}$$
$$= I_z\,\sin^2\alpha + I_y\cos^2\alpha - 2\,I_{yz}\,\sin\alpha\cos s\alpha \tag{A.16d}$$

Análogamente pueden calcularse las expresiones:

$$I_{z_1} = I_z\,\cos^2\alpha + I_y\,\sin^2\alpha + 2\,I_{yz}\,\sin\alpha\cos\alpha \tag{A.17a}$$
$$I_{y_1 z_1} = (I_y - I_z)\,\cos\alpha\sin\alpha + I_{yz}\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \tag{A.17b}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Las ecuaciones anteriores se pueden reescribir en la forma:

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\,\sin 2\alpha \tag{A.18a}$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\,\sin 2\alpha \tag{A.18b}$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\,\cos 2\alpha \tag{A.18c}$$

donde se han utilizado las igualdades trigonométricas:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad ; \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \tag{A.19a}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad ; \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{A.19b}$$

A.1.5 Ejes principales de inercia

En el caso general de sección plana de forma arbitraria, siempre se pueden hallar dos ejes ortogonales baricéntricos para las que se cumple que el producto de inercia de la sección respecto a ellas es nulo. A estos ejes se les denomina *ejes principales de inercia*, y resultan de gran importancia en el estudio de la flexión de piezas prismáticas.

El ángulo α que los ejes principales de inercia de una sección (y, z) forman con otro sistema de ejes baricéntrico (v, w) (ver Figura A.9), se obtiene igualando a cero la ecuación (A.18c) aplicada a los ejes (v, w). De esta forma se obtiene:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{vw}}{I_v - I_w} \tag{A.20}$$

Nótese que si una sección es simétrica respecto a un eje, el sistema formado por dicho eje y otro eje baricéntrico perpendicular a éste es principal de inercia, ya que el correspondiente producto de inercia es nulo.

Si a partir de las ecuaciones (A.18a) o (A.18b), se busca el ángulo α para el que I_{v_1} e I_{w_1} son máximo o mínimo, se obtiene:

$$\frac{\partial I_{v_1}}{\partial \alpha} = -(I_v - I_w)\sin 2\alpha - 2I_{vw}\cos 2\alpha = 0 \tag{A.21}$$

de donde

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{vw}}{I_v - I_w} \tag{A.22}$$

Esta ecuación coincide con la (A.20). Se concluye, por tanto, que *los valores de los momentos principales de inercia corresponden al máximo y mínimo momento de inercia axiales de la sección respecto a ejes baricéntricos.*

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

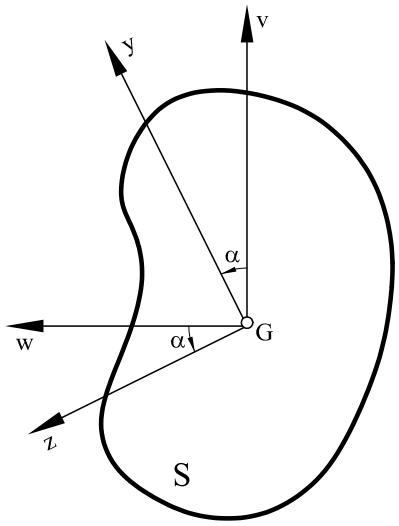

Fig. A.9: Ejes principales de una sección

En el caso particular de que los dos momentos de inercia principales sean iguales, $I_y = I_z$, entonces el momento de inercia vale lo mismo respecto de cualquier eje baricéntrico. Además, el producto de inercia será nulo respecto de cualquier sistema de ejes baricéntricos ortogonales y, por tanto, cualquier eje baricéntrico es eje principal de inercia de la sección. Tal es el caso, por ejemplo, de la sección circular o de la sección cuadrada.

Si se expresan los valores $\sin 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$, en función del valor $\tan 2\alpha$ y se sustituyen en las ecuaciones (A.18a)-(A.18b) se obtiene:

$$\left.\begin{matrix} I_z \\ I_y \end{matrix}\right\} = \frac{I_v + I_w}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_v - I_w}{2}\right)^2 + (I_{vw})^2} \tag{A.23}$$

expresión alternativa que permite calcular los momentos de inercia principales I_y, I_z conocidos los valores de los momentos de inercia I_v, I_w, I_{vw} con respecto a unos ejes (v, w) cualesquiera.

Los *radios de giro principales* de la sección, r_y y r_z, asociados a las direcciones principales de inercia de una sección, son:

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} \qquad ; \qquad r_z^2 = \frac{I_z}{A} \tag{A.24}$$

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

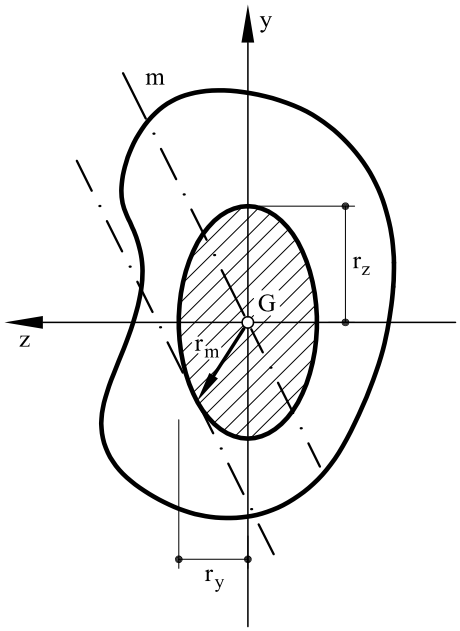

Fig. A.10: Elipse central de inercia de una sección

A.1.6 Elipse central de inercia

Sean (y, z) los ejes principales de inercia de una sección S dada, y sean ρ_y, ρ_z los correspondientes radios de giro. Se denomina *elipse central de inercia de la sección* a la elipse de ecuación:

$$\frac{y^2}{r_z^2} + \frac{z^2}{r_y^2} = 1 \tag{A.25}$$

esto es, una elipse centrada en el baricentro de la sección y que tiene por semieje sobre cada eje principal de inercia el radio de giro de la sección respecto del otro eje principal (Figura A.10).

La elipse central de inercia es un círculo para secciones que tengan el mismo momento de inercia respecto a cualquier eje baricéntrico.

El radio de giro de una dirección m arbitraria que pase por el baricentro de la sección se obtiene gráficamente trazando la tangente a la elipse central de inercia paralela a dicha dirección,y midiendo la distancia desde el baricentro G al punto de tangencia (Figura A.10).

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

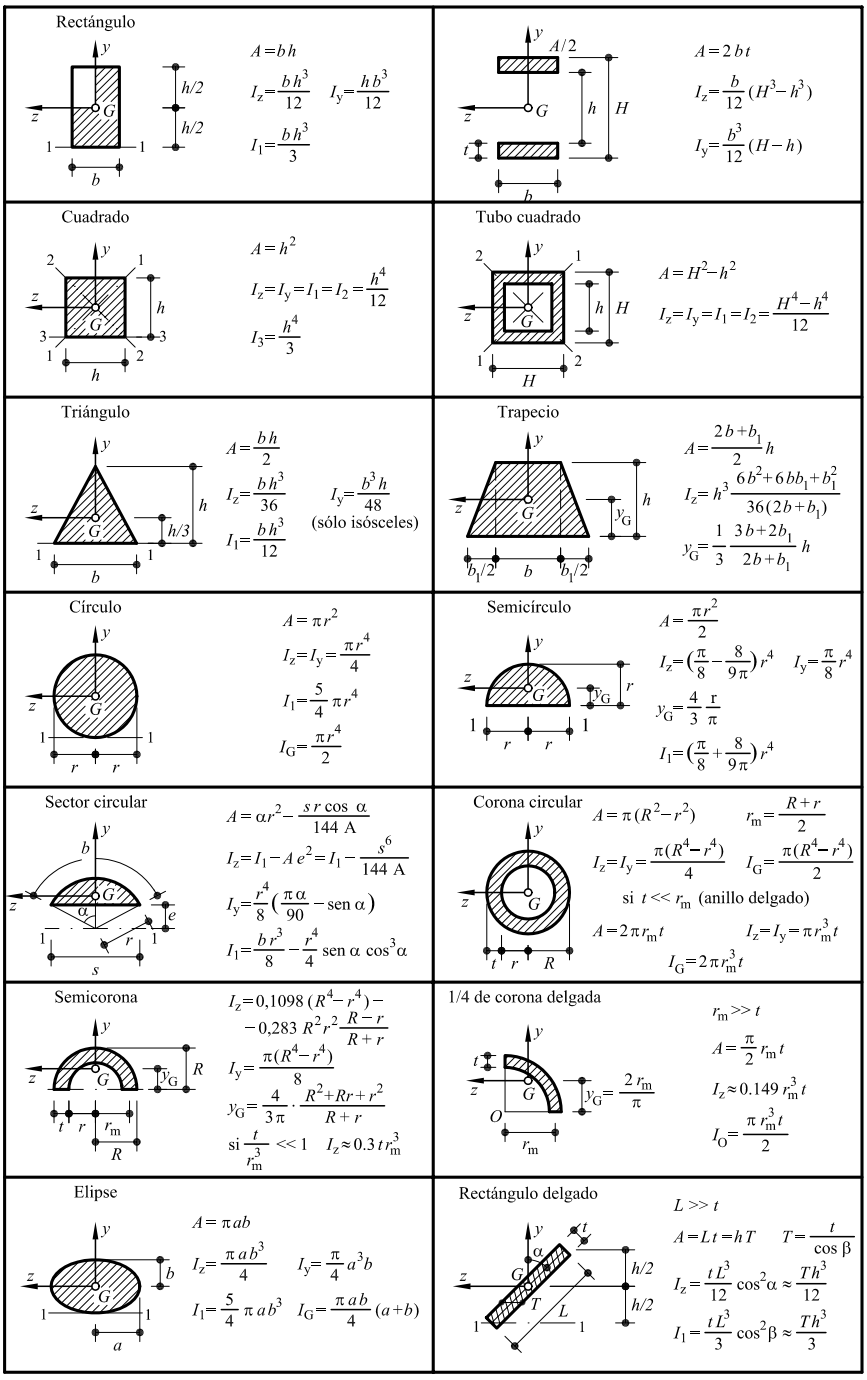

Tabla A.1: Características geométricas de algunas secciones planas

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

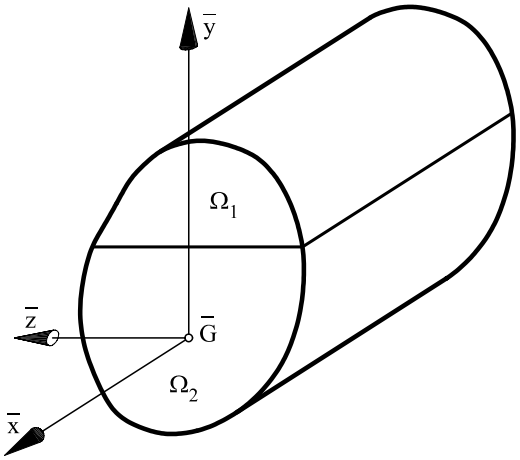

Fig. A.11: Sección de varios materiales

A.2 Secciones de varios materiales

Consideremos una pieza formada por varios materiales de forma que las interficies entre ellos sean paralelas a la directriz de la pieza. Esto es, consideremos que la sección recta de la pieza está dividida en varias zonas Ω_i, cada una de las cuales tiene un área A_i, correspondiente a un material que tiene un módulo elástico E_i, tal como se muestra en la Figura A.11.

Consideremos también un *material de referencia*, que puede ser o no igual a uno de los materiales componentes de la pieza y que tiene un módulo de elasticidad $\overline{E}$. Para cada material de la sección se puede definir un *coeficiente de equivalencia* con el material de referencia de la forma $n_i = E_i/\overline{E}$.

Se define *área homogeneizada, área equivalente* o *área mecánica* de la sección a la integral

$$\overline{A} = \int_S n \, dS \tag{A.26}$$

donde n representa el coeficiente de equivalencia de cada punto de la sección. Se define como *centro de gravedad de la sección homogeneizada* o *centro mecánico* al punto $\overline{G}$, de coordenadas

$$y'_{\overline{G}} = \frac{\int_S y' \, n \, dS}{\int_S n \, dS} \quad ; \quad z'_{\overline{G}} = \frac{\int_S z' \, n \, dS}{\int_S n \, dS} \tag{A.27}$$

respecto a unos ejes cartesianos dextrógiros (y', z') de posición y orientación arbitraria.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Respecto del centro mecánico, es decir, respecto a unos ejes cartesianos dextrógiros $(\overline{y}, \overline{z})$ que pasen por él, se definen los *momentos de inercia mecánicos* de la sección de la forma

$$\overline{I_{\overline{y}}} = \int_S \overline{y}^2 \, n \, dS \quad ; \quad \overline{I_{\overline{z}}} = \int_S \overline{z}^2 \, n \, dS \quad ; \quad \overline{I_{\overline{yz}}} = \int_S \overline{y} \, \overline{z} \, n \, dS \tag{A.28}$$

Se llama *ejes principales de inercia de la sección homogeneizada* o *ejes principales mecánicos* de la sección a unos ejes cartesianos dextrógiros (y, z) con origen en el centro mecánico y tales que respecto a ellos el producto mecánico de inercia sea nulo, esto es:

$$\int_S y \, n \, dS = 0 \quad ; \quad \int_S z \, n \, dS = 0 \quad ; \quad \overline{I_{yz}} = \int_S y \, z \, n \, dS = 0 \tag{A.29}$$

Resulta evidente que para una sección homogénea, esto es, de un único material, los conceptos de área mecánica, centro mecánico, momentos de inercia mecánicos y ejes principales mecánicos coinciden con los respectivos conceptos geométricos.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Bibliografía

Argüelles Álvarez, R. (1985). *Cálculo de Estructuras.* Sección de Publicaciones, E.T.S. Ing. Montes de Madrid.

Beer, F. P. y Johnston, E. R. (1990). *Mecánica Vectorial para Ingenieros.* McGraw-Hill.

Beer, F. P. y Johnston, E. R. (1993). *Mecánica de Materiales.* McGraw-Hill.

Belluzzi, O. (1970). *Ciencia de la construcción.* Aguilar.

Bickford, W. B. (1995). *Mecánica de Sólidos. Conceptos y aplicaciones.* Times Mirror de España–Irwin.

Cook, R. D. y Young, W. C. (1999). *Advanced Mechanics of Materials.* Prentice Hall.

Courbon, J. (1968). *Resistencia de Materiales.*

ENSIDESA (1977). *Manual para el cálculo de estructuras.* Publicaciones de Ensidesa.

ENSIDESA (1993). *Manuales sobre la construcción con acero.* Publicaciones de Ensidesa.

Garrido, J. A. y Foces, A. (1994). *Resistencia de Materiales.* Secretariado de Publicaciones, Universidad de Valladolid.

Gere, J. M. (2001). *Mechanics of Materials.* Brooks/Cole.

Gere, J. M. y Timoshenko, S. P. (1986). *Mecánica de Materiales.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Lardner, T. J. y Archer, R. R. (1996). *Mecánica de Sólidos.* McGraw-Hill.

Massonet, C. (1968). *Résistance des materiaux.* Dunod.

Miquel Canet, J. (2000). *Cálculo de estructuras.* CIMNE, Ediciones UPC.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.

Oden, J. T. y Ripperger, E. A. (1981). *Mechanics of Elastic Structures*. McGraw Hill.

Ortiz Berrocal, L. (1991). *Resistencia de materiales*. McGraw Hill.

Ortiz Berrocal, L. (1998). *Elasticidad*. McGraw Hill.

Pisarenko, G. S., Yakolev, A. P., y Matreev, V. V. (1979). *Manual de Resistencia de Materiales*. Mir.

Popov, E. P. (1999). *Engineering Mechanics of Solids*. Prentice Hall.

Rodríguez–Avial Azcunaga, F. (1990). *Resistencia de Materiales*. Bellisco.

Samartín Quiroga, A. (1995). *Resistencia de Materiales*. Colegio de Ing. de Caminos, Canales y Puertos.

Seely, F. B. y Smith, J. O. (1952). *Advanced Mechanics of Materials*. Wiley.

Shames, I. H. (1999). *Mecánica para Ingenieros*. Prentice Hall.

Timoshenko, S. P. (1982). *Resistencia de Materiales*. Espasa–Calpe.

Timoshenko, S. P. (1983). *History of Strength of Materials*. Dover.

Timoshenko, S. P. y Goodier, J. (1968). *Teoría de la Elasticidad*. Urmo.

Timoshenko, S. P. y Young, D. H. (1979). *Elementos de Resistencia de Materiales*. Montaner y Simón.

Vázquez Fernández, M. (1991). *Resistencia de Materiales*. Noela.

Vázquez Fernández, M. y López Pérez, E. (1991). *Mecánica para Ingenieros. Estática*. Noela.

© Los autores, 2003; © Edicions UPC, 2003.